第1讲 预备知识

2017年6月23日 星期五 下午11:40

1.1 什么是线性代数

- 线性(Linear)+代数(Algrbra)
- 线性代数是**有限维线性空间**及其**线性变换**的基本理论
  - 行列式
  - 矩阵
  - 线性方程组
  - 二次型
- 线性代数的地位
  - 大学数学最重要的两门课程之一
  - 理论自洽相容而且对大多数学生来说都易于接受
  - 是数学抽象和逻辑推理训练的好素材
  - 理论和算法发展最成熟、应用最广泛的数学分支之一
- 线性代数的应用
  - 解析几何
    - 空间点、线、面
    - 单叶双曲面
  - 计算机科学
  - 社会科学
    - 人口迁徙模型
    - 投入产出模型
- 线性代数的特点
  - 内容抽象，但逻辑性强
  - 标号繁多，但规律性强
  - 公式庞杂，但形式优美

1. 2 多项式

- 定义
  - $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{R}\ or\ \mathbb{C}$ 且 $a_n \neq 0)$

- 多项式的次数
  - $deg\big(f(x)\big) = n$
- 带余除法：$f(x)$除以$g(x)$
  - $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$
  - $q(x)$：商
  - $r(x)$：余数
  - 需满足：$deg\big(r(x)\big) < deg(g(x))$
- 代数基本定理
  - 已知
    - $deg \geq 1$ 的多项式在 $\mathbb{C}$ 中有一个根
  - 求证
    - $deg = n$ 的多项式在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个根
  - 证明
    - $f(x) = q_1(x)(x - x_1) + r_1(x)$
    - 令$x = x_1$，
    - 则 左 $= f(x_1) = 0$，右 $= r_1$
    - $\therefore r_1 = 0, \qquad f(x) = q_1(x)(x - x_1)$
    - 重复以上步骤，可得 $f(x) = a_n(x - x_1) \times \cdots \times (x - x_n)$
- 根与系数的关系
  - $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1) \times \cdots \times (x - x_n)$
  - $n - 1$ 次项系数
    - $a_{n-1} = a_n\big(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n\big)$
    - $\Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
  - 常数项
    - $a_0 = a_n(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$
    - $\Rightarrow x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \times \dfrac{a_0}{a_n}$

1.3 排列与逆序

- 排列
  - 由 $1, 2, \dots n$ 组成的一个有序数组 $i_1, i_2, \dots i_n$ 被称为 n 级排列
  - 所有不同的n级排列共有 $n!$ 个
- 对换

- $2413 \xrightarrow{(4,1)} 2143$

- 逆序（inversion）
  - 较大的数 i_t 排在 i_s 之前
- 逆序数 (Number of inversion)
  - $N(i_1, i_2 \dots i_n)$
  - $N(4,5,2,3,1) = 3 + 3 + 1 + 1 = 8$
  - $N(2,4,1,3) = 1 + 2 + 0 = 3$
- 奇偶排列
  - 逆序数为奇数的排列称为奇排列
  - 逆序数为偶数的排列称为偶排列
- 练习：所有的3级排列

排列	123	132	213	231	312	321
N	0	1	1	2	2	3
奇偶	偶	奇	奇	偶	偶	奇

- 定理1.1：对换改变排列的奇偶性
  - 若相邻：$i_1 \dots i_s i_{s+1} i_n \to i_1 \dots i_{s+1} i_s i_n$
    - $i_s > i_{s+1} \Rightarrow N - 1$
    - $i_s < i_{s+1} \Rightarrow N + 1$
  - 若不相邻：$i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n \to i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$
    - $N \ = N(i_s\text{向后移}) + N(i_t\text{向前移})$
    - $= (t - s) + (t - s - 1)$
    - $= 2(t - s) - 1$
- 定理1.2：任意级排列中，奇偶排列各占半（n>1）
  - 对于 $i_1, i_2, \dots i_n$，存在一一对应关系：奇 $\xrightarrow{(1,2)}$ 偶
- 定理1.3：$i_1, i_2, \dots i_n$ 与 $1, 2, 3 \dots n$ 可通过一系列对换互变，奇偶性与对换个数一致
  - $i_1, i_2, \dots i_n \xrightarrow{\text{对换若干次}} 1, 2, 3 \dots \mathrm{n}$
  - 奇排列$\xrightarrow{\text{对换奇数次}}$偶排列
  - 偶排列$\xrightarrow{\text{对换偶数次}}$偶排列

1.4 连加号

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
  - i：求和指标

  - $\sum$：求和号
  - a_i：通项
- 双重求和可以交换
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$
  - $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
    $= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots$
    $+ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

第2讲 行列式

2017年6月24日 星期六 上午1:32

2.1 二阶与三阶行列式

- 定义
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
    $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
- 例1：求 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-2) \times 3 = 10$
- 例2：$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$，求 λ
  - $\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda = 0$
  - $\Rightarrow \lambda = 0 \; or \; 3$
- 例3：求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 10 - 0 - 48 - 0 = -58$
- 例4：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，求$a, b$
  - $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 0$
  - $\Rightarrow a = 0, \qquad b = 0$

2.2 n阶行列式

- 定义（按行）
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$
- 满足性质
  - 共有 $n!$ 项
  - 所有不同行列的排列
  - 符号看列标的奇偶排列

- 例1：四阶行列式中 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的符号
    - $N(4321)=3+2+1=6 \Rightarrow$ 正号
- 例2：四阶行列式中 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 的符号
    - $N(1243)=1 \Rightarrow$ 负号
- 注
    - 行列式是数，一般用符号 D (determinant) 表示
    - 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$
    - n 阶行列式可简写为 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$
    - 有 $n!$ 项，正负各一半（$n\geq 2$）
    - 定义的理论意义 > 计算意义（除非零多）
- 另一种定义
    - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(i_1\dots i_n)+N(j_1\dots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$

2.3 用定义计算行列式

- 下三角行列式
    - $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\dots n)}a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$
- 上三角行列式
    - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$
- 对角线行列式
    - $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$
- 副对角线行列式
    - $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{N(n,n-1\dots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n1}$
    - $N(n,n-1\dots 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

- $(-1)^{n(n-1)/2} = \begin{cases} 1, & n = 4k \ or \ 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \ or \ 4k+3 \end{cases}$
- $\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$
  $= \begin{cases} a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2} \dots a_{n1}, & n = 4k \ or \ 4k+1 \\ -a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2} \dots a_{n1}, & n = 4k+2 \ or \ 4k+3 \end{cases}$

- 练习
  - $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{N(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -1$

第3讲 行列式的性质

2017年6月25日 星期日 上午2:29

3.1 行列式的性质

- 转置(Transposition)
    - $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|$
    - $D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ji}|$
- 性质1
    - 行列式转置后值不变 $D^T = D$
    - $D^T = \sum (-1)^{N(j_1\dots j_n)+N(1,2\dots n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} = \sum_{j_1\dots j_n} (-1)^{N(j_1\dots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} = D$
- 性质2
    - 行列式交换行(列)改变符号
        - $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
        - $\Rightarrow D_1 = -D_2$
    - 证明
        - $D_2 = \sum_{j_1\dots j_n} (-1)^{N(213\dots n)+N(j_1\dots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} = -\sum_{j_1\dots j_n} (-1)^{N(j_1\dots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} = -D_1$
    - 推论
        - 行列式两行(列)相同，则 $D = 0$
        - 交换后 $D = -D' = -D \Rightarrow D = 0$
- 性质3
    - 行列式可以按行(列)相加
        - $D_{bc} = \begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
        - $D_b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

        - $\Rightarrow D_{bc} = D_b + D_c$
    - 证明
        - $D_{bc} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} (b_1 j_1 + c_1 j_1) a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$
          $= \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} b_1 j_1 a_{2j_2} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} c_1 j_1 a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = D_b + D_c$
    - 推论
        - 多个相加仍成立
- 性质4
    - 行列式可以按一行(列)提公因子
        - $D_k = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
        - $\Rightarrow D_k = kD$
    - 证明
        - $D_k = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = k \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{N(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = kD$
    - 推论1
        - D 有一行(列)全为0，则 $D = 0$
    - 推论2
        - D 有一行(列)成比例，则 $D = 0$
- 性质5
    - 把行列式一行(列)的倍数加到另一行，值不变
        - $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \dots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
        - $\Rightarrow D = D'$
    - 证明
        - $D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \times 0 = D$
    - 例
        - $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + 5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 6} 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + 10r_2} 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$
        - $= 6 \times 1 \times (-1) \times 9 = -54$
- 性质6

- 若 D 有 n^2-n 个以上的零，则必定有一行(列)全为0，即 $D=0$

- 性质7
  - 奇数阶反对称行列式为零
    - 若 n为奇数，则 $D=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=0$
  - 证明
    - $D^T=\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=-D$
    - $D^T=D,\qquad D^T=-D\Rightarrow D=0$

3.2 用行列式的性质进行计算

- 例1
  - $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$
- 例2
  - $\begin{vmatrix}0&1&1\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}2&3&4\\0&1&1\\3&4&5\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{3}{2}r_1}-\begin{vmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&-\frac{1}{2}&-1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}-\begin{vmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$
- 例3
  - $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1+(c_2+c_3+c_4)}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1\div10}10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2,r_3,r_4-r_1}$
  - $10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3\div2}20\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}20\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&0&-2&2\\0&0&0&-4\end{vmatrix}$
  - $=20\times1\times1\times(-2)\times(-4)=160$

第4讲 行列式按行(列)展开

2017年6月25日 星期日 下午2:56

4.1 代数余子式

- 三阶行列式
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
- 余子式 (Minor)
  - a_{ij} 所在的行和列划掉后剩下的行列式，记作 M_{ij}
- 代数余子式 (Cofactor)
  - $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$
- 练习：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$
  - $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$
  - $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$

4.2 行列式按一行(列)的展开

- 定理1
  - 内容
    - 对于 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
    - $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}\ (i = 1,2,3 \dots n)$
    - $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\ (j = 1,2,3 \dots n)$
    - 即 $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
  - 证明
    - $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- $= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
- 对于第一项：
  - 第一项 $= \sum_{j_2 \dots j_n} (-1)^{N(1 j_2 \dots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$
  - $= a_{11} \sum_{j_2 \dots j_n} (-1)^{N(1 j_2 \dots j_n)} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$
- 对于第二项，第二列与第一列交换后：
  - 第二项 $= -a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$
- 对于第三项，第三列和第二列交换，第二列再和第一列交换：
  - 第三项 $= a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$
- 以此类推，可得
  - $D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \ (i = 1,2,3 \dots n)$

- 定理2
  - 内容
    - 对于 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
    - $a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \dots + a_{in} A_{sn} = 0$
  - 证明
    - 将 D 第 s 行换成第 i 行，构造 $D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$
    - 将 D' 按 s 行展开，得 $D' = a_{i1} A_{s1} + a_{i2} A_{s2} + \dots + a_{in} A_{sn}$
  - 总结
    - $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{it} = \begin{cases} D, & j = t \\ 0, & j \neq t \end{cases}$
    - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} = \begin{cases} D, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{cases}$
- 练习：$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
  - 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33}$

        - 构造 $D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $D' = A_{13} + A_{23} + A_{33}$
        - $\therefore A_{13} + A_{23} + A_{33} = D' = 0$
    - 求 $A_{11} + A_{12}$
        - 构造 $D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $D' = A_{13} + A_{12}$
        - $\therefore A_{11} + A_{12} = D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$

4.3 范德蒙行列式 (Vandermonde Determinant)

- 定义
    - $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$
- 前三阶范德蒙行列式
    - $V_1 = 1$
    - $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$
    - $V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}$
    - $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}$
    - $= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$
- 正序差
    - $a_j - a_i, \qquad 1 \le i < j \le n$
- 定理
    - $V_n =$ 正序差的乘积 $= \prod\limits_{i \le i < j \le n} (a_j - a_i)$
    - $V_n = [(a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1) \dots (a_2 - a_1)] \times [(a_n - a_2)(a_{n-1} - a_2) \dots (a_3 - a_2)] \times \cdots \times (a_n - a_{n-1})$
    - 项数 $= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- 证明
    - $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

- $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$
- $= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$
- $= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)V_{n-1}$

- 例1：求$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$
  - 原式$= (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12$
- 例2：求$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 16 \\ 27 & 8 & 1 & 64 \end{vmatrix}$
  - 原式$= (2-3)(1-3)(4-3)(1-2)(4-2)(4-1) = -12$
- 例3：$\begin{vmatrix} a+b & x+b & x+a \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0,\ a \neq b,$ 求x
  - $\begin{vmatrix} a+b & x+b & x+a \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$
  - $= \begin{vmatrix} a+b+x & a+b+x & a+b+x \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$
  - $= (a+b+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$
  - $= (a+b+x)(a-x)(b-x)(a-b) = 0$
  - $\Rightarrow x = a \quad or \quad x = b \quad or \quad x = -a-b$

4.4 行列式按多行(列)的展开

- 子式
  - k 行 k 列交叉处组成的行列式
- 子式的余子式
  - 行列式除去子式的部分，用 M 表示
- 代数余子式
  - $A = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}M$
- 定理

- $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k\text{ 行(列)}} SA$
- 其中 S 为 k 阶子式，A 为 $n-k$ 阶代数余子式

- 例：$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 按照前两行展开
  - 原式 $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$
  - $= 1 \times 1 + 6 \times (-2) = -11$

第5讲 行列式的计算

2017年6月26日 星期一 上午12:41

5.1 基本篇

- 例1：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$
  - 定义法
    - $D=(-1)^{N(23\dots n-1,1)}n!=(-1)^{n-1}n!$
  - 对角线法
    - 最后一行交换 $n-1$ 次至第一行
    - $D=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$
  - 按照第一列展开
    - $D=n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$
    - $=n(-1)^{n+1}(n-1)!=(-1)^{n+1}n!$
- 例2：$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
  - 高斯消元法
    - $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
    - $=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$
    - $=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$
    - $=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4$
  - 展开法

- $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
- $= 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
- $= -2 \times 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

- 例3：已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，求$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (-2)(-3)(5) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 30$
- 例4：$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$
  - 原式$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$
  - $= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$
- 例5：已知$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$ 求x
  - $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$
  - $= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1-x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2-x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$
  - $= a_1(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_{n-x}-x) = 0$
  - $\Rightarrow x = a_1 \quad or \quad x = a_2 \quad \dots \quad x = a_{n-1}$
- 例6：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix}$
  - 高斯消元法
    - $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{vmatrix}$

        - $= (k-1)\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (k-1)(k^2-4)$
    - 拉普拉斯展开（按照第三第四行）
        - $D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = (k^2-4)(k-1)$

5.2 技巧篇I—利用行列式性质

- 例1：$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$
    - 原式 = $\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$
    - $= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$
    - $= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & x-a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$
    - $= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$
- 例2：$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$
    - 原式 = $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} = 0$
- 例3（三线型a）：$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & & \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & & & \\ & -1 & 1-a_2 & a_3 & & \\ & & -1 & 1-a_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a_n \\ & & & & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$
    - 按行从上往下加
    - 原式 = $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & & \\ & 1 & a_2 & & & \\ & & 1 & a_3 & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & a_n \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} = 1$

- 例3（三线型b）：$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & -a_3 & a_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$
  - 按列从左往右加
  - 原式 $=\begin{vmatrix} -a_1 & & & & & \\ & -a_2 & & & & \\ & & -a_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -a_n & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)a_1\dots a_n$
- 例3（三线型c）：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & -1 & & & & \\ & 2 & -2 & & & \\ & & 3 & -3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$
  - 按列从右往左加
  - 原式 $=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ & -1 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & -3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1-n \end{vmatrix}$
  - $=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!=\frac{(-1)^{n-1}}{2}(n+1)!$
- 例4（箭型a）：$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$
  - 令 $r_1-\frac{1}{a_1}r_2$ 得 $\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$
  - $=\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}\dots-\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & & & \\ 1 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}$
  - $=a_1\dots a_n(a_0-\frac{1}{a_1}\dots-\frac{1}{a_n})$
- 例4（箭型b）：$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$

- 原式 $= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$
- 令 $r_1 - \frac{1}{a_2} r_2, r_1 - \frac{1}{a_3} r_3 \dots r_1 - \frac{1}{a_n} r_n$ 得
- $\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$
- $= \left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)(a_2 a_3 \dots a_n) = \left(1+\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_n}\right) a_1 \dots a_n$

5.3 技巧篇II—利用行列式的展开

- 例1（两线型a）：$\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ b & & & & a \end{vmatrix}$
  - 原式 $= a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \\ & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{vmatrix}$
  - $= a(-1)^{1+1} a^{n-1} + b(-1)^{n+1} b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$
- 例1（两线型b）：$\begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a & \\ b & & & & a \end{vmatrix}$
  - 原式 $= a(-1)^2 \begin{vmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} & & & b \\ a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \end{vmatrix}$
  - $= a(-1)^2 a^{n-1} + b(-1)^{n+1} b(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$
  - $= \ a(-1)^2 a^{n-1} + b(-1)^{n+1} b(-1)^{1+n-1} a^{n-2} = a^n - b^2 a^{n-2}$
- 例1（两线型c）：$D_{奇\times奇} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & ⋰ & \\ & a & & b & \\ & & a & & \\ & b & & a & \\ & ⋰ & & \ddots & \\ b & & & & a \end{vmatrix}$
  - 令 $r_i - \frac{b}{a} r_1 \ \left(i > \frac{n-1}{2}\right)$ 得

- $\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & \ddots & & & & & \iddots & \\ & & a & & b & & & \\ & & & a & & & & \\ & & & & a-\frac{b^2}{a} & & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & a-\frac{b^2}{a} \end{vmatrix}$
- $= a^{\frac{n+1}{2}}\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} = a(a^2-b^2)^{\frac{n-1}{2}}$

- 例2：$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & -a_3 & a_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$
  - 全部加到第一列得
  - $\begin{vmatrix} & a_1 & & & & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & -a_3 & a_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$
  - $= (n+1)(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ -a_2 & a_2 & & & \\ & -a_3 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_n & a_n \end{vmatrix}_{n\times n}$
  - $= (-1)^n(n+1)a_1a_2\dots a_n$

5.4 提高篇

- 例1：$\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}_{n\times n}$
  - 法1：从后往前将后一列乘 x 加到前一列
    - 原式 $= \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n & \dots & \dots & x^2+a_1x+a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$
    - $= (x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$
    - $= (x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$
  - 法2：直接展开（递推法）

- 原式 $= x(-1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}$
- $= x(-1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix} + a_n$
- 将原式记为 D_n ，则有
- $D_n = xD_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \cdots = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

- 例2：
  - 求证
    - $\begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$
    - $\left(\text{其中}A_{ij}\text{为}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\text{的代数余子式}\right)$
  - 证明
    - $\begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$
    - $= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & x & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & x \end{vmatrix}$
    - $= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{in}$
    - $= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$

- 例3
  - 已知
    - $a_1, a_2 \dots a_n$为互不相同的实数
    - $b_1, b_2 \dots b_n$为任意一组实数
  - 求证
    - 存在唯一的多项式 $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots c_{n-1}x^{n-1}$
    - 使得 $f(a_i) = b_i, \qquad (i = 1,2 \dots n)$
  - 证明
    - $\begin{cases} c_0 + c_1a_1 + \cdots c_{n-1}a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1a_2 + \cdots c_{n-1}a_2^{n-1} = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ c_0 + c_1a_n + \cdots c_{n-1}a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$

- 系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1}\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$
- $=V_n=\prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)$

- 例4：$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_1^{n-2} & a_1^{n-2} & \dots & a_1^{n-2}\\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n\end{vmatrix}$
  - 构造 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & x\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & x^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-2} & a_1^{n-2} & a_1^{n-2} & \dots & a_1^{n-2} & x^{n-2}\\ a_1^{n-1} & a_1^{n-1} & a_1^{n-1} & \dots & a_1^{n-1} & x^{n-1}\\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & x^n\end{vmatrix}$
  - $=\left(\prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)\right)\big((x-a_1)(x-a_1)\dots(x-a_n)\big)$
  - D_{n+1} 为 n 次多项式，可以写为 $c_0+c_1x+\cdots c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$
  - 同时 D_{n+1} 展开得：$D_{n+1}=(-1)^{n+n+1}D$
  - 对比系数得
  - $D=-C_{n-1}=-\left(\prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)\right)(-a_1-a_2-\cdots a_n)$
  - $=\left(\prod_{i\le i<j\le n}(a_j-a_i)\right)\left(\sum a_n\right)$

第6讲 克莱姆法则

2017年6月30日 1:08

6.1 二元和三元线性方程组

- 二元线性方程组
  - $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$
  - $① \times a_{22} - ② \times a_{12} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$
  - 若$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0 \Rightarrow$ 无解或任意解
  - 若$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$
  - 同理可得$x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$
  - 一般将$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$记作$D$，称为系数行列式
  - 将$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$记作$D_1$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$记作$D_2$
  - 则方程组的解可以写成$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_1 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$
- 三元线性方程组
  - $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & ③ \end{cases}$
  - 由行列式的性质$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D, & j = t \\ 0, & j \neq t \end{cases}$，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = \begin{cases} D, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{cases}$
  - 作$① \times A_{11} + ② \times A_{21} + ③ \times A_{31}$以消去$x_1$
  - $\Rightarrow (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$
  - $\begin{cases} (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D \\ b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \dfrac{D_1}{D}$
  - 同理可得$x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}$

6.2 克莱姆法则

- 定理内容
  - $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$，若 $D \neq 0$，则解存在且唯一
  - $x_j = \frac{D_j}{D}$，其中$D_j = \begin{array}{c} \quad\quad\quad j列 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$
- 证明必要性
  - ① $\times A_{11} +$ ② $\times A_{21} +$ ③ $\times A_{31} + \cdots$ 得
  - $(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$
  - $\Rightarrow Dx_1 = D_1$
  - 若 $D \neq 0, x_1 = \frac{D_1}{D}$
  - 类似地 $x_j = \frac{D_j}{D}, \qquad j = 1,2 \dots n$
- 证明充分性
  - 要证明 $a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = b_1$
  - 即证明 $a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots a_{1n}D_n = b_1D$
  - 左 $= [a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})] + \cdots + [a_{1n}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})]$
  - $= b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) = b_1D =$ 右

6.3 法则用于计算？

- $D = |a_{ij}|_{25\times25}$
- 计算一个行列式需要多少次乘法：$25!$ 项 $\times$ 24次/项
- 总共需要乘法次数 = $25! \times 24 \times 26$
- 总共需要除法次数 = 25
- 总乘除法次数 = $25! \times 24 \times 26 + 25$
- 天河二号：33.86×10^{15} 次/秒
- $t = \frac{25! \times 24 \times 26 + 25}{33.86 \times 10^{15}} = 9064$年
- 故克莱姆法则的计算意义不大

6.4 法则的理论意义

- 对于一般的 $n \times n$ 线性方程组
  - $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

- $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 有且仅有一解

- 对于齐次线性方程组
  - $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$
  - $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 仅有零解（即解都为零）
  - $D = 0 \Leftrightarrow$ 有非零解

- 例1：$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$有非零解，求$k$
  - $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-2 & 2 & 0 \\ 3 & k-1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)(k-1) - 6 = 0$
  - $\Rightarrow k = 4 \quad or \quad k = -1$

- 例2：平面直角坐标系内有两点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，求直线方程
  - $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$有非零解 $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

- 推广
  - 已知三点$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$
  - 则这三点确定的平面方程为$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$

第7讲 矩阵

2017年6月30日 23:53

7.1 矩阵的概念

- 定义
  - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - $m \times n$ 矩形的阵，记作 $A_{m\times n}$
  - $a_{ij}(i = 1 \dots m, j = 1 \dots n)$ 称为矩阵的元素
- 历史
  - 英国数学家 Sylvester 在1851年首先提出 Matrix
- 表示
  - $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$
  - $B_{p\times q} = (b_{ij})_{p\times q}$
  - 下标可以省略
- 注意点
  - 零矩阵：$a_{ij} = 0\ (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n)$
  - 非负矩阵：$a_{ij} \geq 0\ (i = 1 \dots m, j = 1 \dots n)$
  - 方阵：$n \times n$ 的矩阵
  - 行向量：$1 \times n$ 的矩阵
  - 列向量：$n \times 1$ 的矩阵

7.2 矩阵的线性运算

- 定义：相等
  - 已知 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，　$B = (b_{ij})_{p\times q}$
  - $A = B \overset{def}{\iff} \begin{cases} m = p \\ n = q \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$
- 定义：加法
  - 已知 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，　$B = (b_{ij})_{p\times q}$
  - $A + B \overset{def}{=} (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

- 加法的性质
  - 结合律
    - $(A+B)+C=A+(B+C)$
  - 交换律
    - $A+B=B+A$
  - 分配律
    - 需要两种运算，暂略
  - 负矩阵
    - $-A\overset{def}{=}(-a_{ij})_{m\times n}$
    - $A+(-A)=0$
  - 单位元（0）
    - $A+0=A$
- 定义：减法
  - 已知 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，　　$B=(b_{ij})_{p\times q}$
  - $\mathrm{A}-\mathrm{B}\overset{def}{=}A+(-B)$
- 定义：数乘（数量乘法）
  - 已知 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，　　$\mathrm{k}\in\mathbb{R}$
  - $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$
- 数乘的性质
  - 结合律
    - $(kl)A=k(lA)$
  - 交换律
    - $kA=Ak$
    - 但无所谓“交换”，一般将数量放在矩阵前面
  - 分配律（对数的加法分配）
    - $(k+l)A=kA+lA$
  - 分配律（对矩阵加法分配）
    - $k(A+B)=kA+kB$
  - 单位元（1）
    - $1A=A$

7.3 线性空间

- 矩阵满足的性质：对于矩阵$A_{m\times n}$，$B_{m\times n}$，$C_{m\times n}$有

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$

2. $A+B=B+A$
3. $A+(-A)=0$
4. $A+0=A$
5. $(kl)A=k(lA)$
6. $(k+l)A=kA+lA$
7. $k(A+B)=kA+kB$
8. $1A=A$

- 定义：线性空间
  - 集合 $S\begin{cases}\text{可定义加法、数乘}\begin{cases}\text{做加法后还在 } S \text{ 内(加法封闭)}\\ \text{做乘法后还在 } S \text{ 内(乘法封闭)}\end{cases}\\ \text{加法和数乘满足以上八条性质(A, B, C用α, β, γ替换)}\end{cases}$
- 线性空间的例子
  - 所有 $m\times n$ 矩阵
  - 所有 n 维向量
  - 所有一元多项式
    - 所有次数 $\leq n$ 的一元多项式是线性空间
    - 所有次数 $> n$ 的一元多项式不是线性空间，因为对加法不封闭

第8讲 矩阵乘法

2017年7月1日 11:36

8.1 矩阵乘法的定义

- 引例
  - 点 (x,y) 绕原点旋转 θ_1 后到 (x',y')
  - 则 (x,y) 和 (x',y') 满足关系$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$ 系数矩阵表示为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
  - 点 (x',y') 再绕原点旋转 θ_2 后到 (x'',y'')
  - 则 (x',y') 和 (x'',y'') 满足关系$\begin{cases} x' = b_{11}x'' + b_{12}y'' \\ y' = b_{21}x'' + b_{22}y'' \end{cases}$ 系数矩阵表示为 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
  - 要求 (x,y) 和 (x'',y'') 之间的关系
  - 我们可以联立$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x' = b_{11}x'' + b_{12}y'' \\ y' = b_{21}x'' + b_{22}y'' \end{cases}$
  - 解得 $\begin{cases} x = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x'' + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})y'' \\ y = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22})x'' + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})y'' \end{cases}$
  - 用系数矩阵表示为 $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
  - 故先做矩阵变换 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，再做矩阵变换$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
  - 等价于做矩阵变换$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
- 定义：矩阵乘法
  - $A = (a_{ij})_{m\times l} \quad B = (b_{ij})_{l\times n} \quad C = (c_{ij})_{m\times n}$
  - $AB \overset{def}{=} C$
  - $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$
- 例1：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$
  - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$
  - $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$
  - $\therefore AB \neq BA$
- 例2：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- $\therefore \mathrm{AB} \neq BA$

- 例3：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
  - BA 未定义
- 例4：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.2 矩阵乘法的性质

- 不满足交换律
  - 一般情况下 $AB \neq BA$（亦有可能未定义）
  - 若 $AB = BA$ 则 A, B 可交换
  - 例：问所有与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵
    - 设 $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 满足 $AB = BA$
    - 则有 $\begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$
  - 注：可交换矩阵必为方阵，且方阵的规模相同
    - $A_{m\times n} \quad B_{p\times q}$
    - 若乘法交换律 $A_{m\times n}B_{p\times q} = B_{p\times q}A_{m\times n}$ 成立
    - 则 $\begin{cases} A_{m\times n}B_{p\times q} \text{ 存在} \\ B_{p\times q}A_{m\times n} \text{ 存在} \\ \text{左} = \text{右} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = p \\ p = q \\ m = p \\ q = n \end{cases} \Rightarrow m = n = p = q$
- 满足结合律
  - 数乘
    - $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
    - 显然成立，证明略
  - 三矩阵相乘
    - $(AB)C = A(BC)$
  - 证明三矩阵相乘结合律：$(AB)C = A(BC)$
    - 为使得运算成立，假设 $A_{m\times s} \quad B_{s\times t} \quad C_{t\times n}$

        - 左通项 = $\sum_{l=1}^{t}\left(\left(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t}a_{ik}b_{il}c_{lj}$
        - 右通项 = $\sum_{k=1}^{s}\left(a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{t}b_{il}c_{lj}\right)\right)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t}a_{ik}b_{il}c_{lj}$
        - ∵ 左通项 = 右通项
        - ∴ 左 = 右，即等式成立■
- 满足分配律
    - $A(B+C)=AB+AC$
    - $(B+C)A=BA+CA$
    - 证明矩阵乘法分配律：$A(B+C)=AB+AC$
        - 为使得运算成立，假设 $A_{m\times l}\quad B_{l\times n}\quad C_{l\times n}$
        - 左通项 = $\sum_{k=1}^{l}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{l}a_{ij}b_{kj}+\sum_{k=1}^{l}a_{ij}c_{kj}$
        - 右通项 = $\sum_{k=1}^{l}a_{ij}b_{kj}+\sum_{k=1}^{l}a_{ij}c_{kj}$
        - ∵ 左通项 = 右通项
        - ∴ 左 = 右，即等式成立■
- 不满足消去律
    - $AB=0\ \nRightarrow\ A=0\quad or\quad B=0$
        - $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\1 & -2\end{pmatrix}$
        - $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -4\\1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
    - $AC=\mathrm{BC}\ \nRightarrow\ A=B$
        - $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix},\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix},\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$
        - $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

8.3 矩阵的其他运算

- 转置
    - 例子
        - $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}_{2\times3}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\\a_{13} & a_{23}\end{pmatrix}_{3\times2}$
    - 定义
        - $A=(a_{ij})_{m\times n}\quad A^T=(b_{ij})_{n\times m}$
        - $b_{ij}=a_{ji},\begin{cases}i=1\ldots n\\b=1\ldots m\end{cases}$

- 转置的性质
  1. $(A^T)^T = A$
  2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
  3. $(kA)^T = k(A^T)$
  4. $(AB)^T = B^T A^T$
- 性质4的证明
  - 为使得运算成立，假设 $A = (a_{ij})_{m\times l}, B = (b_{ij})_{l\times n}$
  - 左通项 = $\sum_{k=1}^{l} a_{jk} b_{ki}$
  - 右通项 = $\sum_{k=1}^{l} b_{ki} a_{jk}$
  - ∵ 左通项 = 右通项
  - ∴ 左 = 右，即等式成立■
- 性质4的推广

  $(ABC)^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T$

- 定义：向量的内积和外积
  - $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)^T$
  - 内积：$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = (x_1, x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
  - 外积：$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$
- 方阵的幂
  - 定义
    - $A^k = \underbrace{AA \dots A}_{共k个}$
  - 方阵幂的性质
    1. $A^{k_1} A^{k_2} = A^{k_1 + k_2}$
    2. $(A^{k_1})^{k_2} = A^{k_1 k_2}$
    3. $(AB)^k \neq A^k B^k$
  - 性质3的反例（$k = 2$）
    - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
    - $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
    - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, (AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$

        - $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 23 & 17 \end{pmatrix}$
        - $\Rightarrow (AB)^2 \neq A^2B^2$
        - 由矩阵不满足交换律决定
- 方阵的行列式
    - 记法
        - $|A|$ 或 $\det(A)$
    - 方阵的行列式的性质
        1. $|A^T| = |A|$
        2. $|kA| = k^n|A|$
        3. $|A + B| \neq |A| + |B|$
        4. $|AB| = |A||B|$
        5. $|A^k| = |A|^k$
        6. $|A_1A_2 \dots A_n| = |A_1||A_2| \dots |A_n|$
        7. $|AB| = |BA|$（若均存在）
    - 性质2的例子
        - $|A_{3\times3}| = 2$
        - $|-2A| = (-2)^3|A| = -16$
    - 性质4的证明（大致思路）
        - 假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$
        - 构造 $D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$
        - 简单可证 $|D| = |A||B| = |AB|$

第9讲 特殊矩阵

2017年7月2日 13:00

9.1 对角矩阵

- 定义
  - 除了主对角线以外都为零的矩阵
  - $a_{ij} = 0, \quad i \neq j$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 性质
  - 零矩阵是对角矩阵
  - 同阶对角矩阵之和仍为对角矩阵
    - $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
  - 对角矩阵数乘后仍为对角矩阵
    - $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ka_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ka_{nn} \end{pmatrix}$
  - 同阶对角矩阵相乘后仍为对角矩阵
    - $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$
  - 对角矩阵转置后仍为本身
    - A为对角矩阵 $\Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$
    - $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A} \nRightarrow$ A为对角矩阵
    - $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A} \Rightarrow$ A为对称矩阵

9.2 单位矩阵

- 定义
  - 一般用 I 或 E 表示
  - $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- 性质
  - 原矩阵右乘单位矩阵仍为本身
    - $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - 原矩阵左乘单位矩阵仍为本身
    - $A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$
    - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - 规定 $A^0 = I$

9.3 数量矩阵

- 定义
  - $a_{ij} = \begin{cases} a, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
  - $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$
- 性质
  - 可以表示为单位矩阵数乘
    - $A = aI$
  - 与数量矩阵相乘等价于原矩阵的数乘
    - $AB = aB$
    - $BA = aB$
  - 与任意方阵可交换

9.4 三角形矩阵

- 上三角矩阵
  - 主对角线左下方全为零的矩阵
  - $a_{ij} = 0, \qquad i > j$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- 下三角矩阵
  - 主对角线右上方全为零的矩阵
  - $a_{ij} = 0, \quad i < j$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 性质
  - 若 A 为上(下)三角矩阵，则 kA 仍为上(下)三角矩阵
    - $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ 0 & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ka_{nn} \end{pmatrix}$
  - 若 A, B 为同阶上(下)三角矩阵，则 $A + B$ 仍为上(下)三角矩阵
    - $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ 0 & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$
  - 若 A, B 为同阶上(下)三角矩阵，则 AB 仍为上(下)三角矩阵
    - 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \quad (a_{ij} = 0, i > j)$
    - $\quad B = (b_{ij})_{n\times n} \quad (b_{ij} = 0, i > j)$
    - $\quad C = AB = (c_{ij})_{n\times n}$
    - 要证 $c_{ij} = 0, i > j$
    - 根据定义，$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
    - 对于任意 k，$i > k$ 和 $k > j$ 至少有一个满足
    - 若 $i > k$, 则 $a_{ik} = 0$
    - 若 $k > j$, 则 $b_{kj} = 0$
    - $\therefore\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0\, , i > j$
    - 即 $C = AB$ 仍为上三角矩阵 ■

9.5 对称矩阵

- 定义
  - $A^T = A$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
  - $A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad A^T = (b_{ij})_{n\times n}, \quad b_{ij} = a_{ji}$
- 性质

- 若 A 对称矩阵，则 kA 仍为对称矩阵
  - $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{12} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{1n} & ka_{2n} & \dots & ka_{nn} \end{pmatrix}$
- 若 A,B 为同阶对称矩阵，则 $A+B$ 仍为对称矩阵
  - $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$
- 若 A,B 为同阶对称矩阵，则 AB **不一定**为对称矩阵
  - 反例：$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- AB 对称 $\Leftrightarrow$ 可交换
  - $(AB)^T=B^TA^T=BA\overset{若可交换}{=}AB$
- 对于任意 $A_{m\times n}, A^TA$ 与 AA^T 对称
  - $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$
  - $(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$

9.6 反对称矩阵

- 定义
  - $A^T=-A$
  - $A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$
  - $A=(a_{ij})_{n\times n}, \qquad A^T=(b_{ij})_{n\times n}, \qquad b_{ij}=-a_{ji}$
- 性质
  - 若 A 是奇数阶反对称矩阵，则 $|A|=0$
    - 证明略
  - 对于任意方阵 A， $A+A^T$ 是对称方阵，$A-A^T$ 是反对称矩阵
    - $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$
    - $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A$
  - 任意方阵可以写成对称矩阵与反对称矩阵之和
    - $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$

第10讲 矩阵的逆

2017年7月2日 14:01

10.1 逆矩阵的概念

- 引例：线性方程组
  - $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
  - $A\vec{x} = \vec{b}$
- 定义
  - 对于方阵 A，若存在方阵 B，使得 $AB = BA = I$
  - 则称 A 可逆，B 称为 A 的逆矩阵，一般表示为 A^{-1}
  - 注：定义并没有说明 A 的逆矩阵是否一定存在
- 性质
  - 如果逆矩阵存在，则唯一
    - 假设 B 与 C 都是 A 的逆矩阵，即 $AB = BA = I$，$AC = CA = I$
    - $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$
    - 即 $B = C$■
  - A, B 互逆
    - $AB = BA = I$
  - 单位矩阵的逆
    - $I_n^{-1} = I_n$
    - $I_n I_n = I_n$
  - 对角矩阵的逆
    - $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \neq 0 \ \ (i = 1,2 \dots n)$
    - $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

- 例子：求 $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵
  - $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, 设 $B=A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$
  - $AB=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\c & d\end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
  - $\Rightarrow\begin{cases}a+2c=1\\b+2d=0\\c=0\\d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=0\\d=1\end{cases}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$
  - 检验 $BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I$
  - $\therefore AB=BA=I$
  - 即 $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

10.2 用伴随矩阵求逆

- 定义：非奇异（非退化）
  - 一个方阵的行列式不为零
  - $|A_{n\times n}|\neq 0$
- 定义：代数余子式矩阵（Cofactor）
  - 原矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$
  - 代数余子式矩阵 $C=(A_{ij})_{n\times n}$, 其中 A_{ij} 为相应位置的代数余子式
  - $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{代数余子式矩阵}}C=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$
- 伴随矩阵 A^*
  - 定义
    - $A^*=C^T=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}$
  - 例子
    - $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{伴随矩阵}}A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
  - 性质
    - $AA^*=A^*A=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \dots & 0\\0 & |A| & \dots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \dots & |A|\end{pmatrix}=|A|I$
- 定理1
  - $|A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆

- 证明充分性
  - $\because |A| \neq 0$
  - $\therefore A\dfrac{1}{|A|}A^* = I,\qquad \dfrac{1}{|A|}A^*A = I$
  - 即 A 可逆，逆矩阵为 $\dfrac{1}{|A|}A^*$ ■
- 证明必要性
  - 存在 $AB = BA = I$
  - $|AB| = |I|$
  - $|A||B| = 1$
  - $|A| \neq 0$ ■

- 例1：求 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{伴随矩阵}} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $|A| = 1 \neq 0 \Rightarrow A$可逆
  - $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 例2：求 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \neq 0\ \ (i = 1,2\dots n)$ 的逆矩阵
  - $|A| = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$
  - $\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} a_2 a_3 \dots a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 a_3 \dots a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 a_2 \dots a_{n-1} \end{pmatrix}$
  - $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix}$
- 定理2
  - $AB = I \Leftrightarrow BA = I$
  - 证明
    - $\because AB = I$
    - $\therefore |AB| = |I| = 1$
    - $\therefore |A||B| = 1$
    - $\therefore |A| \neq 0$,即 A 可逆
    - $\therefore B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$

        - 根据逆矩阵的性质，有 $BA = I$

- 例3：已知 $aA^2 + bA + cI = 0\ (c \neq 0)$，问 A 是否可逆
    - 法1：行列式不等于零
        - $aA^2 + bA\ = -cI$
        - $\Rightarrow A(aA + bI) = -cI$
        - $\Rightarrow |A(aA + bI)| = |-cI|$
        - $\Rightarrow |\mathrm{A}||aA + bI| = |-cI| = (-c)^n|I| = (-c)^n \neq 0$
        - $\Rightarrow |A| \neq 0$ 即A可逆■
    - 法2：求出逆矩阵
        - $aA^2 + bA\ = -cI$
        - $\Rightarrow A(aA + bI) = -cI$
        - $\Rightarrow A\left(-\frac{a}{c}A + \frac{b}{c}I\right) = I$
        - $\Rightarrow A^{-1} = \left(-\frac{a}{c}A + \frac{b}{c}I\right)$ 即A可逆■

10.3 逆矩阵的性质

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
    - 证明：$A^{-1}A = I$
2. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ (其中$k \neq 0$)
    - 证明：$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k \times \frac{1}{k}\right)AA^{-1} = I$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    - 证明：$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
    - 证明：$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}\ = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
    - 推广：$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5. $\left(A^k\right)^{-1} = (A^{-1})^k \overset{def}{=} A^{-k}$
    - 证明
        - $A^k(A^{-1})^k$
        - $= \underbrace{AA \ldots A}_{共k个} \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{共k个}$
        - $= AA \ldots (A\,A^{-1})A^{-1} \ldots A^{-1}$
        - $= AA \ldots IA^{-1} \ldots A^{-1} = \cdots = I$
6. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
    - 证明
        - $AA^{-1} = I$

        - $|A||A^{-1}| = 1$
        - $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
        - 即$|A^{-1}| = |A|^{-1}$■
    - 推广
        - $|A^{-k}| = \left|\left(A^k\right)^{-1}\right| = \left|A^k\right|^{-1} = |A|^{-k}$
7. $AB = AC$,且 A 可逆 $\Rightarrow$ 则 $B = C$
    - 证明
        - $AB = AC$
        - $\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$
        - $\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$
        - $\Rightarrow IB = IC$
        - $\Rightarrow B = C$
    - 推广
        - $AB = 0$,且 A 可逆 $\Rightarrow B = 0$

10.4 伴随矩阵的性质

1. $AA^* = A^*A = |A|I$
    - 证明略
2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \qquad A^* = |A|A^{-1}\ \ (|A| \neq 0)$
    - 证明略
3. $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A\ \ (|A| \neq 0)$
    - 证明略
4. $|A^*| = |A|^{n-1}$
    - 证明：当 $n = 1$ 时
        - 规定 $|A^*| = A^* = 1$
    - 若 $|A| \neq 0$，要证 $|\mathrm{A}^*| = |\mathrm{A}|^{n-1}$
        - $|AA^*| = \big||A|I\big|$
        - $|A||A^*| = |A|^n|I| = |A|^n$
        - $|A^*|\ = |A|^{n-1}$
    - 若 $|A| = 0$，要证 $|\mathrm{A}^*| = |\mathrm{A}|^{n-1} = 0$
        - 反证：假设 $|A^*| \neq 0$，即 A^* 可逆
        - $\mathrm{AA^*} = |\mathrm{A}|\mathrm{I}$
        - $\mathrm{AA^*(A^*)^{-1}} = |\mathrm{A}|\mathrm{I}(\mathrm{A^*})^{-1}$
        - $\mathrm{A} = \mathbf{0}$

        - $\mathrm{A}^* = \mathbf{0}$ 与 $|A| = 0$ 矛盾，故 $|A^*| = 0$
    - 综上所述 $|A^*| = |A|^{n-1}$
5. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
    - 只证 $|A| \neq 0$ 时
        - $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$
6. $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
    - 观察到 A^* 中每个 $n-1$ 阶的代数余子式都乘以 k^{n-1}
7. $(A^T)^* = (A^*)^T$
    - 证明略
8. $(AB)^* = B^*A^*$
    - 只证 $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ 时
        - $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*$
    - 推广
        - $(ABC)^* = C^*B^*A^*$
9. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
    - 证明
        - 左 = $(\mathrm{A}^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$
        - 右 = $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$
        - 等式成立 ■
    - 推广
        - $\left(A^{-k}\right)^* = (A^*)^{-k}$
10. $\left(A^k\right)^* = (A^*)^k$
    - 证明略

第11讲 分块矩阵

2017年7月3日 13:43

11.1 矩阵的分块

- 引例
  - $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&4\end{pmatrix}_{4\times4}=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}_{2\times2}$,其中
  - $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}_{2\times2}$,其中$\begin{cases}A_1=I_2\\A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\\A_3=\mathbf{0}\\A_4=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\end{cases}$
  - $A=\begin{pmatrix}I^3&M\\\mathbf{0}&4\end{pmatrix}$,其中$M=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
- 常见的分块方法
  - 按列分：$A=(A_1,A_2,A_3,A_4)$
  - 按行分：$A=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{pmatrix}$
- 运算
  - 假设$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\B_{21}&B_{22}&B_{23}\end{pmatrix}$
  - 数乘
    - $kA=\begin{pmatrix}kA_{11}&kA_{12}&kA_{13}\\kA_{21}&kA_{22}&kA_{23}\end{pmatrix}$
  - 加法
    - $A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&A_{13}+B_{13}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&A_{23}+B_{23}\end{pmatrix}$
  - 转置
    - $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T\\A_{13}^T&A_{23}^T\end{pmatrix}$

11.2 分块矩阵的乘法

- 前提条件

- $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ B_{t1} & B_{t2} & \dots & B_{tr}\end{pmatrix}$
- A 的列分块方式与 B 的行分块方式一致时，才能做分块乘法

- 例子：已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 4}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{4\times 2}$，求 AB
  - 分法1
    - $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 4} \overset{分块}{=} \begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & 1\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2\times 3}$
    - $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{4\times 2} \overset{分块}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{3\times 2}$
    - $AB=\begin{pmatrix}1 & \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & 1\\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix}1 & 0\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}_{2\times 2}$
    - 其中 $\begin{cases} C_1 = 1 + \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0 = 1\\ C_2 = 0 + \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 = 0\\ C_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}1 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ C_4 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}$
  - 分法2
    - $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix}I_3 & \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{1\times 2}$
    - $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2\times 1}$
    - $AB=I_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}$
  - 分法3
    - $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix}I_2 & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2\times 2}$
    - $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix}I_2\\ I_2\end{pmatrix}_{2\times 1}$

- $AB=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$,其中$\begin{cases}C_1=I_2+\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\\C_2=(0\quad 0)+(1\quad 3)=(1\quad 3)\end{cases}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\\1&3\end{pmatrix}$

11.3 分块矩阵的行列式

- 分块矩阵行列式成立**有条件**
  - $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}\neq|A||D|-|B||C|$
  - $\begin{vmatrix}A_{r\times r}&0_{r\times s}\\C_{s\times r}&D_{s\times s}\end{vmatrix}=(-1)^{2(1+2+\cdots+r)}|A||D|=|A||D|$
  - $\begin{vmatrix}A_{r\times r}&B_{r\times s}\\0_{s\times r}&D_{s\times s}\end{vmatrix}=(-1)^{2(1+2+\cdots+r)}|A||D|=|A||D|$
- 下三角分块矩阵
  - $\begin{vmatrix}A_{11}&0&0&\dots&0\\A_{21}&A_{22}&0&\dots&0\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&A_{s3}&\dots&A_{ss}\end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|\dots|A_{ss}|$
- 上三角分块矩阵
  - $\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&\dots&A_{1s}\\0&A_{22}&A_{23}&\dots&A_{2s}\\0&0&A_{33}&\dots&A_{3s}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&A_{ss}\end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|\dots|A_{ss}|$
- 对角形分块矩阵
  - $\begin{vmatrix}A_{11}&0&0&\dots&0\\0&A_{22}&0&\dots&0\\0&0&A_{33}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&A_{ss}\end{vmatrix}=|A_{11}||A_{22}|\dots|A_{ss}|$
- 例题：已知分块矩阵 $D=\begin{pmatrix}A_{r\times r}&C_{r\times s}\\0_{s\times r}&B_{s\times s}\end{pmatrix}$,其中 A,B 可逆，求证 D 可逆,并求出 D^{-1}
  - $|D|=|A||B|\neq 0\Rightarrow D$ 可逆
  - 设 $D^{-1}=\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix}$
  - 则 $DD^{-1}=\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&Y\\Z&W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX+CZ&AY+CW\\BZ&BW\end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&I_s\end{pmatrix}$
  - $\Rightarrow\begin{cases}AX+CZ=I\\AY+CW=0\\BZ=0\\BW=I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=A^{-1}\\Y=-A^{-1}CB^{-1}\\Z=0\\W=B^{-1}\end{cases}\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$

第12讲 矩阵的初等变换

2017年7月3日 15:00

12.1 初等变换

1. 交换两行(列)
   - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$
2. 用一非零的数 k 乘以某一行(列)
   - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_1} \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
3. 用一行(列)的 l 被加到另一行(列)
   - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + lr_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + la_{11} & a_{22} + la_{12} & a_{23} + la_{13} \end{pmatrix}$

- 初等行变换可以看作对线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 的操作

12.2 初等矩阵

- 定义
  - 单位矩阵 I 经过**一次**初等变换得到的矩阵
- 三类初等矩阵
  - $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换两行(列)}} I(ij) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$
  - $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{将一非零数 } k \text{ 乘到第 } i \text{ 行}} I(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$
  - $I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{将第 } j \text{ 行的 } l \text{ 倍加到第 } i \text{ 行}} I(ij(l)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$
- 练习：判断初等矩阵

    - $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是
    - $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$否
    - $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$是
    - $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$否
    - $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是
- 定理
    - 对 $A_{m\times n}$ 做初等行变换相当于左乘相应的初等矩阵 $I(ij)_m, I\big(i(k)\big)_m, I\big(ij(k)\big)_m$
    - 对 $A_{m\times n}$ 做初等列变换相当于右乘相应的初等矩阵 $I(ij)_n, I\big(i(k)\big)_n, I\big(ij(k)\big)_n$
- 练习
    - $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$
    - 第一类变换
        - $I(ij)=I(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
        - $I(1,2)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2\\A_1\\A_3\end{pmatrix}$
    - 第二类变换
        - $I(i(k))=I(1(k))=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
        - $I(1(k))A=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kA_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$
    - 第三类变换
        - $I\big(ij(k)\big)=I\big(2,1(l)\big)=\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
        - $I\big(2,1(l)\big)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\lA_1+A_2\\A_3\end{pmatrix}$
- 例题：已知 $|A_{3\times3}|=3$，B 是 A 交换 1,2 行得到的，求 $|BA^*|$
    - $B=I(12)A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}A$

- $|BA^*| = |I(12)AA^*| = |I(12)|A|I| = |A|^3|I(12)||I| = 3^3 \times (-1) \times 1$

- 性质：初等矩阵都是可逆的
  - $I(ij)I(ij) = I$
  - $I(i(k^{-1}))I(i(k)) = I$
  - $I\big(ij(-l)\big)I\big(ij(l)\big) = I$

12.3 矩阵等价

- 定义
  - 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ B 可由 A 经过一系列初等变换的得到
- 等价关系的三个性质
  - 反身性：A 与 A 等价
    - 矩阵等价显然满足反身性
  - 对称性：A 与 B 等价 $\Leftrightarrow$ B 与 A 等价
    - $B = P_1 \dots P_s A Q_1 \dots Q_t$
    - $\Rightarrow A = P_s^{-1} \dots P_1^{-1} B Q_t^{-1} \dots Q_1^{-1}$
    - 故矩阵等价满足对称性
  - 传递性：若 A 与 B 等价，且 B 与 C 等价，则 A 与 C 等价
    - $\begin{cases} B = P_1 \dots P_s A Q_1 \dots Q_t \\ C = R_1 \dots R_l B S_1 \dots S_m \end{cases}$
    - $\Rightarrow C = R_1 \dots R_l P_1 \dots P_s A Q_1 \dots Q_t S_1 \dots S_m$
    - 故矩阵等价满足传递性
- 等价标准形
  - 定义
    - $A_{m\times n}$ 的等价标准形 $D = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$
  - 例1：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 的等价标准形
    - $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - 例2：2×3 矩阵所有可能的等价标准形
    - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

12.4 关于初等变换的重要定理

- 定理1：可逆矩阵 A 的等价标准形 $D=I$
  - $D=P_1\dots P_sAQ_1\dots Q_t$
  - $\begin{cases}|A|\neq 0\\ |P_i|\neq 0\\ |Q_j|\neq 0\end{cases}\Rightarrow |D|=|P_1|\dots|P_s||A||Q_1|\dots|Q_t|\neq 0$
  - $\therefore D=I$
- 定理2：可逆矩阵 A 可以写成一系列初等矩阵的乘积
  - $A=P_1\dots P_sIQ_1\dots Q_t=P_1\dots P_sQ_1\dots Q_t$
- 推论1：A 与 B 等价 $\Leftrightarrow B=PAQ$（其中 P,Q 可逆）
  - $B=P_1\dots P_sAQ_1\dots Q_t=PAQ$,其中 $\begin{cases}P=P_1\dots P_s\\ Q=Q_1\dots Q_t\end{cases}$
- 推论2：可逆矩阵 A 只需初等行变换就可以化成 $D=I$
  - $A=P_1\dots P_s=P_1\dots P_sI$
  - $\Rightarrow P_s^{-1}\dots P_2^{-1}P_1^{-1}A=I$

12.5 用初等变换求逆

- 思路
  - 对于可逆矩阵 A ,根据推论2
  - $\begin{cases}P_1\dots P_sA=I\\ A^{-1}=P_1\dots P_sI\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{对 } A \text{ 做一系列初等行变换可以得到 } I\\ \text{对 } I \text{ 做同样变换可以得到 } A^{-1}\end{cases}$
  - 即分块矩阵 $(A\quad I)_{n\times 2n}$ 可以通过一系列初等行变换得到 $(I\quad A^{-1})_{n\times 2n}$
- 例：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$,求 A^{-1}
  - $(A\quad I)_{n\times 2n}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\2&0&-1&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{pmatrix}_{3\times 6}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&0&-3&-2&1&0\\0&1&-1&-3&0&1\end{pmatrix}$

    $\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-3&0&1\\0&0&-3&-2&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-3&0&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$

    $\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&-\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=(I\quad A^{-1})$
  - $\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&1\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$

第13讲 矩阵的秩

2017年7月3日　　18:17

13.1 秩的概念

- 定义
  - 非零子式的最高阶数，记作 $r(A)$
  - $\begin{cases} \text{存在 } r \text{ 阶子式非零} \\ \text{所有 } r+1 \text{ 阶子式都为零} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) \geq r \\ r(A) \leq r \end{cases} \Rightarrow$ 矩阵 A 的秩为 r
  - 若 $A = 0$, 则 $r(A) = 0$
  - $0 \leq r(A_{m\times n}) \leq \min(m, n)$
- 例子：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$
- 满秩
  - 方阵满秩
    - $r(A_{n\times n}) = n$
  - 行满秩
    - $r(A_{m\times n}) = m \ (m < n)$
  - 列满秩
    - $r(A_{m\times n}) = n \ (n < m)$
  - 性质：A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆 $\Leftrightarrow$ 非奇异 $\Leftrightarrow$ 非退化
    - $r(A) = n$
    - $\Rightarrow$ 存在 n 阶子式不为零，即其自身
    - $\Rightarrow |A| \neq 0$ ■

13.2 秩的性质

- 定理1
  - 初等变换不改变秩
  - 交换两行
    - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$
    - 对于交换到的子式，仅改变符号，不改变非零性
    - 即 $r(B) = r(A)$
  - 用非零 k 乘一行
    - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_1} B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

                - 包含这一行的子式乘以 k，不改变非零性
                - 即 $r(B) = r(A)$
        - 一行的 l 倍加到另一行
            - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+lr_1} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+la_{11} & a_{22}+la_{12} & a_{23}+la_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
            - 对于不包含这两行的子式
                - 如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，无变化
            - 对于两行都包含的子式
                - 如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+la_{11} & a_{22}+la_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，与原子式相等
            - 对于只包含被加行的子式
                - 如$\begin{vmatrix} a_{21}+la_{11} & a_{22}+la_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
                - 若$r(A) = r$，根据上式 B 的 $r+1$ 阶全为零 $\Rightarrow r(B) \le r(A)$
                - 若将 B 初等变换回 A，同理可以得到 $r(A) \le r(B)$
                - 即 $r(B) = r(A)$
            - 综上所述 $r(B) = r(A)$
- 定理2
    - 乘可逆矩阵不改变秩
    - A 可逆 $\Rightarrow r(B) = r(AB) = r(BA)$

13.3 化阶梯形求秩

- 等价标准形矩阵的秩
    - $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(D) = r$
- 阶梯形矩阵
    - 定义

$$\begin{cases} \text{零行位于下方} \\ \text{每一行的非零首元下方都为零} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{零行位于下方} \\ \text{非零首元逐行靠后} \end{cases}$$

    - 例子
        - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - 练习：列举所有可能的 3×3 的阶梯形矩阵

        - 用 $*$ 代表任意元素，用 ! 代表非零元素
        - $\begin{pmatrix} ! & * & * \\ 0 & ! & * \\ 0 & 0 & ! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ! & * & * \\ 0 & ! & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ! & * & * \\ 0 & 0 & ! \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ! & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} 0 & ! & * \\ 0 & 0 & ! \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & ! & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ! \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 定理：阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数
- 例1：求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩
    - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
    - $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
    - $\Rightarrow r(A) = 4$
- 例2：$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，已知 $r(A) = 2$，求 λ
    - 方法一：行列式
        - $r(A) = 2 \Rightarrow A$不满秩 $\Rightarrow |A| = 0$
        - $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 3\lambda+3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}$
        - $= -\begin{vmatrix} 3\lambda+3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = -(3\lambda+3) + 9 = 0$
        - $\Rightarrow \lambda = 2$
        - 经检验，此时 $r(A) = 2$
    - 方法二：初等行变换
        - $\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ \lambda+2 & 2\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}$
        - $\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 3\lambda+3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{3}(\lambda+1) \end{pmatrix}$
        - $\because r(A) = 2$
        - $\therefore\ 1 - \frac{1}{3}(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

第14讲 线性方程组

2017年7月6日 22:30

14.1 消元解法

- 增广矩阵
  - 系数矩阵+常数列
- 简化阶梯形
  - 阶梯形
  - 非零首元都是1
  - 首元上下都为零
- 例1：有一组解
  - $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 5x_1+7x_2+x_3=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ -3x_2+\dfrac{9}{2}x_3=0 \\ 2x_2+\dfrac{7}{2}x_3=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ x_2-\dfrac{3}{2}x_3=0 \\ \dfrac{13}{2}x_3=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & \dfrac{9}{2} & 0 \\ 0 & 2 & \dfrac{7}{2} & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{13}{2} & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 例2：无穷多解
  - $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ -x_3=2 \\ x_3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ x_3=-2 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}x_2 \\ x_3=-2 \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 例3：无解
  - $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_1+x_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_2=1 \\ -x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_2=1 \\ 0=-1 \end{cases}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14.2 解的情况

- 方程组$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & 0 & d_{r+1} \\ & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$解的情况
    1. 若 $d_{n+1} \neq 0 \Rightarrow$ 无解
        - $0 = d_{r+1} \neq 0$ 矛盾
    2. 若 $d_{n+1} = 0$ 且 $r = n \Rightarrow$ 唯一解
        - $\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{nn}x_n = d_n \end{cases}$
        - 从后往前解出后代入可以求得$\begin{cases} x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}} \\ x_{n-1} = \cdots \\ \vdots \\ x_1 = \cdots \end{cases}$
    3. 若 $d_{n+1} = 0$ 且 $r < n \Rightarrow$ 无穷多组解
        - $\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ 0 = 0 \end{cases}$
        - $\Rightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1n}x_n \ldots \\ \vdots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{rn}x_n \ldots \end{cases}$，即等式右边均为自由变量
- 用矩阵的秩来表示解的情况
    - 对于 $A\vec{x} = \vec{b}$，构造增广矩阵 $(A, \vec{b})$
    - 无解
        - $r(A,b) \neq r(A) \Leftrightarrow r(A,b) > r(A) \Leftrightarrow r(A,b) = r(A) + 1$
    - 有解
        - $r(A,b) = r(A)$
    - 唯一解
        - $r(A,b) = r(A) = n$
    - 无穷多组解
        - $r(A,b) = r(A) < n$
- 齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$
    - 齐次线性方程组一定有零解，故只讨论两种解的情况
    - 定理1
        - 有非零解 $\Leftrightarrow$ 无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) < n$

        - 只有零解 $\Leftrightarrow$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$
    - 定理2
        - 如果方程个数少于未知数个数，则有非零解
        - 证明：将方程个数记为 m，则有 $r(A) < m < n$

第15讲 向量

2017年7月7日　11:56

15.1 向量及其线性运算

- 什么是向量
  - 向量 = 矢量 = vector
  - 物理：有大小、方向的量
  - 几何：有向线段
  - 代数：有序数组
- 向量的表示
  - 粗体：$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$
  - 箭头：$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$
  - 行向量(几何,物理)：$\vec{\alpha} = (a_1, a_2 \dots a_n)$
  - 列向量(代数)：$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1 \dots b_n)^T$
- 注
  - 零向量：$\vec{0} = (0 \dots 0)^T$
  - 负向量：$-\vec{\alpha} = (-a_1, -a_2 \dots -a_n)$
  - 相等、加法、数乘与矩阵相同
- 线性空间：所有 n 维向量组成的集合，记作 $\mathbb{R}^n$，又称为向量空间
  - 可定义加法，数乘（对加法、数乘封闭）
    - $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$
    - $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
  - 八条性质
    1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$
    2. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
    3. $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$
    4. $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
    5. $(kl)\vec{\alpha} = k(l\vec{\alpha})$
    6. $(k+l)\vec{\alpha} = k\vec{\alpha} + l\vec{\alpha}$
    7. $k(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = k\vec{\alpha} + k\vec{\beta}$
    8. $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

- 线性子空间：S 是线性空间，且 $S \subset \mathbb{R}^n$
  - 自然满足第1，2，5，6，7，8条性质
  - 需要验证第3，4条性质，以及是否对加法、数乘封闭，即
    - $\vec{\alpha} \in S \overset{?}{\Rightarrow} -\vec{\alpha} \in S$
    - $\vec{0} \in S$
    - $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \overset{?}{\Rightarrow} \vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$
    - $\vec{\alpha} \in S, k \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} k\vec{\alpha} \in S$
  - 由于后两条包含了前两条，故只需验证
    - $\begin{cases} \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S \overset{?}{\Rightarrow} \vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S \\ \vec{\alpha} \in S, k \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} k\vec{\alpha} \in S \end{cases}$

15.2 向量的点积与叉积

- 点积（内积，点乘）
  - 定义
    - $\vec{\alpha} = (a_1, a_2 \dots a_n)^T, \vec{\beta} = (b_1, b_2 \dots b_n)^T$
    - $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$
    - $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}^T \beta = (a_1, a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$
  - 性质
    - 交换律：$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$
    - 结合律：$(k\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
    - 分配律：$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$
    - $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 \geq 0$
    - $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- 向量的长度（范数）
  - 定义
    - $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\vec{\alpha}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$
    - $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
  - 性质1：$\|\vec{\alpha}\| \geq 0$
    - $\|\vec{\alpha}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
  - 性质2：$\|k\vec{\alpha}\| = |k| \cdot \|\vec{\alpha}\|$

            - 证明略
    - 性质3：$\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|$
        - 柯西–施瓦茨不等式
        - 施瓦茨不等式
        - 柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式
        - $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$
        - 构造 $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + k\vec{\beta}$ $(\mathrm{k} \in \mathbb{R})$
        - 则 $\vec{\gamma}^2 = \left(\vec{\alpha} + k\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + k^2\vec{\beta}^2 + 2k\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \ge 0$ 恒成立
        - 看作以 k 为未知数的方程，有 $\Delta = \left(2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 - 4\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2 \le 0$
        - $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2 \le \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$
        - $\Rightarrow \left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right| \le \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|$
        - （亦可用用均值不等式证明）
- 向量的夹角
    - 定义
        - 根据余弦定理 $\left\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right\|^2 = \|\vec{\alpha}^2\| + \left\|\vec{\beta}^2\right\| + 2\|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\| cos\,\theta$
        - 又因为 $\left\|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right\|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$
        - $\Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{\alpha}^2\| + \left\|\vec{\beta}^2\right\| + 2\|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\| cos\,\theta$
        - $\Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\| cos\,\theta$
        - $\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\| cos\,\theta$（此为几何学的内积定义）
        - $\Rightarrow cos\,\theta = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\|}$
        - （柯西不等式保证了 $-1 \le \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\|} \le 1$）
    - 正交（垂直）
        - $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$
- 叉积（在 $\mathbb{R}^3$ 中）
    - 几何定义
        - $\begin{cases}\text{大小}: \|\vec{\gamma}\| = \|\vec{\alpha}\|\left\|\vec{\beta}\right\| sin\,\theta \\ \text{方向}: \text{通过右手法则判断}\end{cases} \Rightarrow \vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \vec{\gamma}$
    - 代数定义
        - $\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

- $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$，其中 $\begin{cases} \hat{\imath} = (1,0,0) \\ \hat{\jmath} = (0,1,0) \\ \hat{k} = (0,0,1) \end{cases}$

- 性质
  - 反交换律：$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha}$
  - 结合律：$(k\vec{\alpha}) \times \vec{\beta} = \vec{\alpha} \times (k\vec{\beta}) = k(\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$
  - 分配律：$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\gamma} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma}$

15.3 空间中的直线与平面

- 空间中的直线
  - 已知空间内一点 P，以及方向 $\vec{\alpha}$，假设直线上有一点 P_0
  - 则直线方程可以用向量形式写为
    - $\vec{P} = k\vec{\alpha} + \vec{P_0}\ (k \in \mathbb{R})$
  - 也可以写成分量形式，若 $P(x,y,z), P_0(x_0,y_0,z_0), \vec{\alpha} = (a_1,a_2,a_3)$
  - 可以得到直线的**参数方程**（显式）
    - $\begin{cases} x = x_0 + ka_1 \\ y = y_0 + ka_2 \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$
  - 将 k 约去可以得到直线的**标准方程**（隐式）
    - $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$
- 例1：求过空间内两点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程
  - $\vec{\alpha} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$
  - $\Rightarrow \vec{P} = \vec{P_1} + k(\vec{P_2} - \vec{P_1})$
  - $\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - z_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) \end{cases}$
  - $\Rightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
- 空间中的平面
  - 确定一个平面需要平面上一个点 P_0 和该平面的法向量 $\vec{\beta}$
  - 则平面的方程可以用向量表示为
    - $(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{\beta} = 0$
  - 写成分量形式，若 $P(x,y,z), P_0(x_0,y_0,z_0), \vec{\beta} = (b_1,b_2,b_3)$
  - 可以得到平面方程的**标准形式**（**点法式**）
    - $b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) = 0$

    - 展开后可以得到平面的**一般方程**
        - $b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$
        - 其中 $c = -b_1x_0 - b_2x_0 - b_3x_0$
- 线性子空间
    - 直线
        - 若空间内的直线过原点
        - 则直线方程 $\vec{P} = k\vec{\alpha} + \overrightarrow{P_0}$ 可以化为 $\vec{P} = k\vec{\alpha}$
        - 对于直线上任意两点 $\overrightarrow{P_1} = k_1\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{P_2} = k_2\vec{\alpha}$ ，可以得到
        - $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = (k_1 + k_2)\vec{\alpha}$, $t\overrightarrow{P_1} = (tk_1)\vec{\alpha}$
        - 即过原点的直线方程对加法封闭
        - 故过原点的直线是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间
    - 平面
        - 若空间内的平面过原点
        - 则平面方程 $(\vec{P} - \overrightarrow{P_0}) \cdot \vec{\beta} = 0$ 可以化为 $\vec{P} \cdot \vec{\beta} = 0$
        - 对于平面上任意两点 $\overrightarrow{P_1} \cdot \vec{\beta} = 0$, $\overrightarrow{P_2} \cdot \vec{\beta} = 0$ ，可以得到
        - $(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}) \cdot \vec{\beta} = 0$, $(k\overrightarrow{P_1}) \cdot \vec{\beta} = 0$
        - 即过原点的平面方程对加法封闭
        - 故过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间
- 例2：求过三点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的平面方程
    - 法1：克莱姆法则
        - $\begin{cases} b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 + c = 0 \\ b_1x_2 + b_2y_2 + b_3z_2 + c = 0 \\ b_1x_3 + b_2y_3 + b_3z_3 + c = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \end{cases}$有非零解
        - $\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0$
    - 法2：向量法
        - $\vec{\beta} = (\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}) \times (\overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1})$
        - $= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$
        - $= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$
        - $(\vec{P} - \overrightarrow{P_1}) \cdot \vec{\beta} = 0$
        - $\Rightarrow (x - x_1)A_{11} + (y - y_1)A_{12} + (z - z_1)A_{13} = 0$

- $$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

第16讲 向量组

2017年7月7日　23:03

16.1 线性组合与线性表示

- 线性方程组用向量形式表示
  - $A\vec{x}=\vec{b}$
  - $(\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$
  - $x_1\vec{\alpha_1}+\cdots+x_n\vec{\alpha_n}=\vec{b}$
  - 将 $\vec{b}$ 称为向量组 $\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n}$ 的线性组合
  - 亦可表述为 $\vec{b}$ 被向量组 $\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n}$ 线性表示（表出）
- 定理
  - 对于 $A=(\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n})_{m\times n},\vec{\beta}=A\vec{x}$
  - 若 $r(A)=r(A,\vec{\beta})$，则 $\vec{\beta}$ 可以被 $\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n}$ 线性表出
- 例1：$\vec{0}$ 可以被任意向量线性表出
  - $\vec{0}=0\cdot\vec{\alpha_1}+0\cdot\vec{\alpha_2}+\cdots+0\cdot\vec{\alpha_n}$
- 例2：任意 $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^n$ 可以被 $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\dots\vec{e_n}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$
  - $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+\cdots+a_n\vec{e_n}$
  - 注：$\vec{e_1}\dots\vec{e_n}$ 被称为初始单位向量组
- 例3：$\vec{\alpha_1}\dots\vec{\alpha_n}$ 可以线性表出 $\vec{\alpha_i}$
  - $\vec{\alpha_i}=0\cdot\vec{\alpha_1}+\cdots+1\cdot\vec{\alpha_i}+\cdots+0\cdot\vec{\alpha_n}$
- 向量组线性表示另一个向量组
  - 将 $\vec{\beta_1},\vec{\beta_2}\dots\vec{\beta_n}$ 记作 (B)，$\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}\dots\vec{\alpha_n}$ 记作 (A)
  - 若 (B) 中的每个向量都可以被 (A) 线性表示
  - 则称 (B) 可以被 (A) 线性表示
- 向量组等价
  - 反身性：(A) 与 (A) 等价
    - (A) 可以用 (A) 线性表示
  - 对称性：(A) 与 (B) 等价 $\Leftrightarrow$ (B) 与 (A) 等价

(A) 可以用 (B) 线性表示 $\Leftrightarrow$ (B) 可以用 (A) 线性表示

- 传递性：若 (A) 与 (B) 等价，且 (B) 与 (C) 等价，则 (A) 与 C 等价
  - 若 (B) 可以被 (A) 线性表示，且 (C) 可以被 (B) 线性表示
  - 则 (C) 可以被 (A) 线性表示
- 故向量组等价是一种等价关系

16.2 线性相关性

- 定义
  - $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$
  - 若上式存在 $k_1\ldots k_n$ 不全为零，则称向量组 $\overrightarrow{a_1}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 线性相关
  - 若上式解得 $k_1\ldots k_n$ 全为零，则称向量组 $\overrightarrow{a_1}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 线性无关
- 缩写
  - 线性相关：Linearly Independent，简写为 LI
  - 线性无关：Linearly Dependent，简写为 LD
- 例1：一个向量的相关性
  - 一个向量 $\vec{\alpha}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}=\vec{0}$
  - 一个向量 $\vec{\alpha}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$
- 例2：$\vec{0},\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 一定线性相关
  - $1\cdot\vec{0}+0\cdot\overrightarrow{a_1}+0\cdot\overrightarrow{a_2}+\cdots+0\cdot\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$
- 例3：两个非零向量 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$ 线性相关
  - $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}=\vec{0}$
  - k_1,k_2中必有一个不为零，若 $k_1\neq 0$
  - 则 $\overrightarrow{a_1}=-\dfrac{k_2}{k_1}\overrightarrow{a_2}$
  - 即两个向量成比例
- 定理
  - 要判断 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 的线性相关性
  - 即解齐次线性方程组 $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$ 有非零解
  - 构造矩阵 $\mathrm{A}=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_n})$，则
  - 当 $r(A)<n$ 时， $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 线性相关
  - 当 $r(A)=n$ 时， $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\ldots\overrightarrow{a_n}$ 线性无关

- 例4：求向量组$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\-1\\11\end{pmatrix}$的线性相关性
    - 构造 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&3\\-1&1&-1\\5&1&11\end{pmatrix}$，消为阶梯形得$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-5&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
    - $r(A)=2<3$
- 推论1
    - $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$ 是 n 个 n 维向量
    - 构造矩阵 A = ($\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$)，则
    - 当 $|A|=0$ 时，矩阵不满秩，即 $r(A)<n$， $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$ 线性相关
    - 当 $|A|\neq 0$ 时，矩阵满秩，即 $r(A)=n$， $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$ 线性无关
- 推论2
    - 向量个数大于维数，则线性相关
    - $r(A)\leq$ 维数 $<n$

16.3 相关性定理

- 定理1
    - 内容
        - 若部分组线性相关，则原向量组线性相关
    - 证明
        - 原向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$ 中取出部分组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_s}$
        - 若部分组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_s}$ 线性相关，即
        - $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_s\overrightarrow{a_s}=\vec{0}$
        - $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+k_s\overrightarrow{a_s}+0\cdot\overrightarrow{a_{s+1}}+\cdots+0\cdot\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$
        - 即原向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\dots\overrightarrow{a_n}$ 线性相关
    - 逆反
        - 若原向量组线性无关，则部分组都线性无关
- 定理2
    - 内容
        - 若砍掉部分分量后线性无关，则原向量组线性无关
    - 逆反
        - 原向量组线性相关，则砍掉部分分量后线性相关
    - 例

- $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$线性无关，由于 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$线性无关

- 定理3
  - 内容
    - 向量组线性相关，则其中至少一个向量可被其他线性表示
    - 若 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ $(s \geq 2)$ 线性相关，则必定存在
    - $\overrightarrow{a_i} = k_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + k_{i-1}\overrightarrow{a_{i-1}} + k_{i+1}\overrightarrow{a_{i+1}} + \cdots k_s\overrightarrow{a_s}$
  - 证明
    - 若 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ $(s \geq 2)$ 线性相关
    - 则 $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s} = \vec{0}$ 其中必有一个 $k_i \neq 0$
    - 移项得 $\overrightarrow{a_i} = -\frac{k_1}{k_i}\overrightarrow{a_1} \dots - \frac{k_s}{k_i}\overrightarrow{a_s}$
- 定理4
  - 内容
    - 若 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ 线性无关，加上 $\vec{\beta}$ 后的向量组 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}, \vec{\beta}$ 线性相关
    - 则 $\vec{\beta}$ 可被 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ 线性表出，且表示方法唯一
  - 证明可以被线性表出
    - $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}, \vec{\beta}$ 线性相关
    - 即 $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_s\overrightarrow{a_s} + k_{s+1}\vec{\beta} = \vec{0}$
    - 若 $k_{s+1} = 0$，则 $\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ 线性相关，与题设矛盾
    - 即 $k_{s+1} \neq 0$
    - $\Rightarrow \vec{\beta} = -\frac{k_1}{k_{s+1}}\overrightarrow{a_1} \dots - \frac{k_s}{k_{s+1}}\overrightarrow{a_s}$
  - 证明唯一性
    - 若 $\vec{\beta}$ 有两种表示方法
    - $\vec{\beta} = l_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + l_s\overrightarrow{a_s}$
    - $\vec{\beta} = m_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + m_s\overrightarrow{a_s}$
    - 分别相减得
    - $\vec{0} = (l_1 - m_1)\overrightarrow{a_1} + \cdots (l_s - m_s)\overrightarrow{a_s}$
    - $\because \overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_s}$ 线性无关
    - $\therefore \begin{cases} l_1 - m_1 = 0 \\ \vdots \\ l_s - m_s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = m_1 \\ \vdots \\ l_s = m_s \end{cases}$
    - 即 $\vec{\beta}$ 的表示方法唯一

- 定理5
  - 内容
    - 将 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\dots\overrightarrow{\alpha_s}$ 记作 (A)，$\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2}\dots\overrightarrow{\beta_t}$ 记作 (B)
    - 若 (B) 可以被 (A) 表出，且 $t>s$，则 (B) 线性相关
  - 证明略
  - 逆反
    - 若 (B) 可以被 (A) 表出，且 (B) 线性无关，则 $t\le s$
- 推论
  - 内容
    - 若 (B) 与 (A) 等价，且线性无关，则 $s=t$
  - 证明
    - (B) 可以被 (A) 线性表示 $\Rightarrow t\le s$
    - (A) 可以被 (B) 线性表示 $\Rightarrow s\le t$
    - 即 $s=t$

第17讲 向量组的秩

2017年7月8日　14:27

17.1 极大无关组

- 定义
  - 部分组线性无关，且加上任何一个向量后即线性相关
- 例子
  - $\binom{0}{1},\binom{1}{0},\binom{1}{1}$ 中的极大无关组为 $\binom{0}{1},\binom{1}{0}$ 和 $\binom{1}{0},\binom{1}{1}$ 和 $\binom{0}{1},\binom{1}{1}$
- 性质
  - 极大无关组不一定唯一
  - 向量组线性无关，则其极大无关组为自身
  - 如果向量组只有 $\vec{0}$ ，则不存在极大无关组
- 定理1
  - 内容
    - 极大无关组与原向量组等价
  - 证明
    - 显然极大无关组可以被原向量组表示
    - 以下证明原向量组可以被极大无关组表示
    - 将原向量组记为 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\dots\overrightarrow{\alpha_n}$ ，极大无关组记为 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\dots\overrightarrow{\alpha_s}$
    - 从原向量组中取出 $\overrightarrow{\alpha_i}$
    - 若 $i\le s$ ，则显然 $\overrightarrow{\alpha_i}$ 可以被极大无关组表出
    - 若 $i>s$ ，根据定义，极大无关组加上一个向量后即线性相关
    - 即 $\overrightarrow{\alpha_i}=k_1\vec{\alpha}_1+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s$
- 定理2
  - 任意两个极大无关组的向量个数相同
  - 证明可由第16讲定理5的推论得到
- 向量组的秩
  - 极大无关组中向量的个数
- 定理3：

- 内容
  - 任何一个线性无关的部分组都可扩充为极大无关组
- 极大无关组的一种求法
  - 可以先从向量组中取出一个非零向量
  - 再依次添加所有线性无关向量
  - 既可以通过扩充的方法得到极大无关组

- 定理4
  - 内容
    - 若部分组线性无关，且向量个数=秩，则部分组就是极大无关组
  - 证明
    - 假设部分组不是极大无关组
    - 则添加某向量后部分组仍旧线性无关
    - 即向量个数大于秩，矛盾
    - 故部分组就是极大无关组
- 练习：求 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_4}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ 的极大无关组
  - 构造 $A=(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3},\overrightarrow{\alpha_4})=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$
  - 由于初等行变换不改变列向量之间的线性关系
  - $A\to\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3},\overrightarrow{\beta_4})$
  - 显然 $\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2}$ 是极大无关组，且 $\begin{cases}\overrightarrow{\beta_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\beta_1}+\overrightarrow{\beta_2}\\\overrightarrow{\beta_4}=\overrightarrow{\beta_1}+\overrightarrow{\beta_2}\end{cases}$
  - 故 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}$ 是极大无关组，且 $\begin{cases}\overrightarrow{\alpha_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}\\\overrightarrow{\alpha_4}=\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2}\end{cases}$

17.2 向量组的秩与矩阵的秩

- 向量组的秩
  - 极大无关组中向量的个数
- 矩阵的秩
  - 非零子式的最高阶数

- 列秩（列向量组的秩）
  - $A=(\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_n})$
- 行秩（行向量组的秩）
  - $A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{\beta_1}\\ \vdots\\ \overrightarrow{\beta_n}\end{pmatrix}$
- 定理
  - 内容
    - $r(A)=$ 行秩 $=$ 列秩
  - 证明列向量组线性无关
    - $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$
    - 假设 $r(A)=r$，即存在 r 阶子式不为零
    - 假设 r 阶子式位于左上方，即 $\begin{vmatrix}a_{11} & \dots & a_{1r}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0$
    - $\Rightarrow$ 向量组 $\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{r2}\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}a_{1r}\\ \vdots\\ a_{rr}\end{pmatrix}$ 线性无关
    - 即向量组 $\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{r2}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}a_{1r}\\ \vdots\\ a_{rr}\\ \vdots\\ a_{mr}\end{pmatrix}$ 线性无关
  - 证明列向量组极大
    - 即证明 $\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}a_{1r}\\ \vdots\\ a_{mr}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{1,r+1}\\ \vdots\\ a_{m,r+1}\end{pmatrix}$ 线性相关
    - 假设线性无关
    - 构造 $A_r=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r+1}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,r+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,r+1}\end{pmatrix}$
    - 由于线性无关，有 $r(A_r)=r+1$
    - 即 A_r 存在 $r+1$ 阶的子式非零
    - 因为 A_r 取自 A，所以 A 也存在 $r+1$ 阶的子式非零
    - 与 $r(A)=r$ 矛盾
    - 即列向量组是极大无关组
  - 同理可证 $r(A)=$ 行秩

17.3 关于秩的重要定理

- 定理1
  - 内容
    - 将 $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} \dots \overrightarrow{\alpha_s}$ 记作 (A)，$\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2} \dots \overrightarrow{\beta_t}$ 记作 (B)
    - 若 (B) 可以被 (A) 表出，则 $r(B) \le r(A)$
  - 证明
    - (B) 可以被 (A) 表出
    - (B) 的极大无关组可以被 (A) 的极大无关组表出
    - $r(B) \le r(A)$
  - 推论
    - 将 $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} \dots \overrightarrow{\alpha_s}$ 记作 (A)，$\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2} \dots \overrightarrow{\beta_t}$ 记作 (B)
    - 若 (A) 与 (B) 等价，则 $r(B) = r(A)$
- 定理2
  - 内容
    - 对于矩阵 $A_{m\times n}, B_{n\times p}$，有 $r(AB) \le \min\big(r(A), r(B)\big)$
  - 证明
    - $A = (\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_n}), B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$
    - $AB = \big(b_{11}\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots b_{n1}\overrightarrow{\alpha_n} \quad \dots \quad b_{1p}\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots b_{np}\overrightarrow{\alpha_n}\big) = (\overrightarrow{\gamma_1} \dots \overrightarrow{\gamma_p})$
    - 即 $\overrightarrow{\gamma_i}$ 可以表示为 $\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_n}$ 的线性组合
    - $\overrightarrow{\gamma_i} = k_{i1}\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + k_{in}\overrightarrow{\alpha_n}$
    - 根据定理1， $r(AB) \le r(A)$
    - 同理 $r(AB) \le r(B)$
    - 即 $r(AB) \le \min\big(r(A), r(B)\big)$
- 定理3
  - 内容
    - 假设 A 可逆，则 $r(AB) = r(B), r(CA) = r(C)$
  - 证明
    - 由定理2可得 $r(AB) \le r(B)$
    - 又因为 $r(B) = r(A^{-1}AB) \le r(AB)$
    - 所以 $r(AB) = r(B)$

            - 同理可证 $r(CA)=r(C)$

- 定理4
    - 内容
        - $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$
    - 证明
        - $A=(\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_n}),B=(\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_n})$
        - $A+\mathrm{B}=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\beta_1},\dots,\overrightarrow{\alpha_n}+\overrightarrow{\beta_n})$
        - $r(A+B)\leq r(A,B)=r(\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_n},\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_n})$
        - 若 $\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_n}$ 的极大无关组为 $\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_s}$ ，$\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_n}$ 的极大无关组为$\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_t}$
        - $r(A+B)\leq r(\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_s},\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_t})\leq s+t=r(A)+r(B)$
- 定理5：西尔维斯特(Sylvester)不等式
    - 内容
        - $r(A_{m\times n}B_{n\times p})\geq r(A)+r(B)-n$
    - 证明
        - $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\leq r\begin{pmatrix}A & 0\\ -I & B\end{pmatrix}$
        - $=r\begin{pmatrix}A & AB\\ -I & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0 & AB\\ -I & 0\end{pmatrix}=r(AB)+r(-I)=r(AB)-n$
        - 即 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$
- 推论
    - 内容
        - A 列满秩 $\Rightarrow r(AB)=r(B)$
        - A 行满秩 $\Rightarrow r(CA)=r(C)$
    - 证明
        - A 列满秩 $\Rightarrow r(A_{m\times n})=n$
        - $r(AB)\leq r(B)$
        - $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n=r(B)$
        - $\Rightarrow r(AB)=r(B)$
        - 同理可证 A 行满秩 $\Rightarrow r(CA)=r(C)$

第18讲 线性方程组解的结构

2017年7月9日 11:56

18.1 齐次线性方程组解的结构

- 将齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解集记为 S (Solution Set)
- 解集的性质
  - $S \subseteq R^n$
  - 对加法封闭
    - 设 $\vec{\xi_1} \in S, \vec{\xi_2} \in S$
    - 代入得 $A\vec{\xi_1} = 0, A\vec{\xi_2} = 0$
    - $\Rightarrow A(\vec{\xi_1} + \vec{\xi_2}) = 0$
    - 即 $\vec{\xi_1} + \vec{\xi_2} \in S$
  - 对数乘封闭
    - 设 $\vec{\xi} \in S, k \in \mathbb{R}$
    - $A\vec{\xi} = 0 \Rightarrow kA\vec{\xi} = 0 \Rightarrow A\left(k\vec{\xi}\right) = 0$
    - 即 $k\vec{\xi} \in S$
  - S 是 R^n 的子空间
    - $\vec{\xi_1} \in S, \dots, \vec{\xi_2} \in S$
    - $\Rightarrow c_1\vec{\xi_1} + \cdots c_t\vec{\xi_t} \in S$
  - S 是线性空间
    - $r(A) = n \Rightarrow S = \{\vec{0}\}$
    - $r(A) < n \Rightarrow$ 子空间

18.2 基础解系

- 基础解系
  - **齐次**线性方程组解集的极大无关组
- 定理1
  - 内容
    - $r(A) = n \Rightarrow$ 无基础解系
    - $r(A) < n \Rightarrow$ 基础解系中向量的个数 $r(S) = n - r(A)$
  - 例题

        - $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$
        - $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{最简阶梯形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
        - $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$
    - 注
        - 其中 x_1, x_2 被称为约束变量，x_3, x_4 被称为自由变量
        - 约束变量为最简阶梯形中首元一对应的变量
        - 约束变量的个数为非零行的个数 $r(A)$
        - 自由变量的个数为 $n - r(A)$，即为解集 S 的秩 $r(S)$
        - 将 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入 x_1, x_2 得到 $\overrightarrow{\xi_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
        - 将 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 代入 x_1, x_2 得到 $\overrightarrow{\xi_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
        - 则 $\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_2}$ 构成基础解系
        - 即原方程的任意一个解 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ 都可以写成 $a_3\overrightarrow{\xi_1} + a_4\overrightarrow{\xi_2}$
- 定理2
    - 内容
        - $\mathrm{A}_{m\times n}B_{n\times p} = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \le n$
    - 证一
        - 令 $B = (\overrightarrow{\beta_1} \dots \overrightarrow{\beta_p})$
        - $AB = A(\overrightarrow{\beta_1} \dots \overrightarrow{\beta_p}) = (A\overrightarrow{\beta_1}, \dots, A\overrightarrow{\beta_p}) = 0$
        - $\Rightarrow A\overrightarrow{\beta_1} = 0, \dots, A\overrightarrow{\beta_p} = 0$
        - 将 $A\vec{x} = 0$ 的解集记为 S
        - 则 $\overrightarrow{\beta_1}, \dots, \overrightarrow{\beta_s} \in S$

        - 即 $\overrightarrow{\beta_1},\ldots,\overrightarrow{\beta_s}$ 可以被 S 表出
        - $r(B) \le r(S) = n - r(A)$
        - $\Rightarrow r(A) + r(B) \le n$
    - 证二
        - 根据 西尔维斯特(Sylvester)不等式
        - $r(A_{m\times n}B_{n\times p}) \ge r(A) + r(B) - n$
        - $0 > r(A) + r(B) - n$
        - $\Rightarrow r(A) + r(B) \le n$

18.3 非齐次线性方程组解的结构

- 导出组
    - $A\vec{x} = \vec{b} \ne 0$ 的导出组为 $A\vec{x} = 0$
- T 的性质
    - 将 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解集记为 T，$A\vec{x} = 0$ 的解集记为 S
    - T 不对加法封闭：已知 $\overrightarrow{\eta_1} \in T, \overrightarrow{\eta_2} \in T$，则 $\overrightarrow{\eta_1} + \overrightarrow{\eta_2} \notin T$
        - $\overrightarrow{\eta_1} \in T, \overrightarrow{\eta_2} \in T$
        - $\Rightarrow A\overrightarrow{\eta_1} = \vec{b}, A\overrightarrow{\eta_2} = \vec{b}$
        - $\Rightarrow A(\overrightarrow{\eta_1} + \overrightarrow{\eta_2}) = 2\vec{b} \ne \vec{b}$
    - T 不对数乘封闭：已知 $\vec{\eta} \in T$，则 $k\vec{\eta} \notin T\ (k \ne 1)$
        - $\vec{\eta} \in T$
        - $\Rightarrow A\vec{\eta} = \vec{b}$
        - 当 $k \ne 1$ 时，$Ak\vec{\eta} = k\vec{b} \ne \vec{b}$
    - 已知 $\vec{\eta} \in T, \vec{\xi} \in S$，则 $\vec{\eta} + \vec{\xi} \in T$
        - $\vec{\eta} \in T, \vec{\xi} \in S$
        - $A\vec{\eta} = \vec{b}, A\vec{\xi} = \vec{0}$
        - $A(\vec{\eta} + \vec{\xi}) = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$
    - 已知 $\overrightarrow{\eta_1} \in T, \overrightarrow{\eta_2} \in T$，则 $\overrightarrow{\eta_1} - \overrightarrow{\eta_2} \in S$
        - $\overrightarrow{\eta_1} \in T, \overrightarrow{\eta_2} \in T$
        - $\Rightarrow A\overrightarrow{\eta_1} = \vec{b}, A\overrightarrow{\eta_2} = \vec{b}$
        - $\Rightarrow A(\overrightarrow{\eta_1} - \overrightarrow{\eta_2}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$
- 定理
    - 内容
        - $\overrightarrow{\eta_0}$ 是 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的一个特解，$\vec{\xi}$ 是 $A\vec{x} = 0$ 的解
        - 如果 $\vec{\xi}$ 取变 $A\vec{x} = 0$ 所有的解

    - 则 $\overrightarrow{\eta_0}+\vec{\xi}$ 取变 $A\vec{x}=\vec{b}$ 所有的解
  - 证明
    - 假设 $\vec{\eta}$ 是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的任意解
    - 则 $\vec{\eta}-\overrightarrow{\eta_0}\in S$
    - 即在 S 中存在 $\vec{\xi}$，使得 $\vec{\eta}-\overrightarrow{\eta_0}=\vec{\xi}$
    - 即 $\vec{\eta}=\overrightarrow{\eta_0}+\vec{\xi}$
  - 故 T 被称为仿射空间(affine)
- 例子：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \end{cases}$
  - $\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right)\to\left(\begin{matrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right)\Rightarrow\begin{cases} x_1=-x_3-2x_4+2 \\ x_2=x_3+1 \end{cases}$
  - 令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得到一特解 $\overrightarrow{\eta_0}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
  - 计算导出组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x_1=-x_3-2x_4 \\ x_2=x_3 \end{cases}$
  - 令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得到 $\overrightarrow{\zeta_1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{\zeta_2}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$
  - $\vec{\eta}=\overrightarrow{\eta_0}+c_1\overrightarrow{\zeta_1}+c_2\overrightarrow{\zeta_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

第19讲 特征值与特征向量

2017年7月9日 17:25

19.1 概念

- 引入
  - 对于矩阵$A_{m\times n}$是，否存在一个数 λ 和非零向量 $\vec{\alpha}$，使得 $A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$
  - $\vec{\alpha}$ 被称为特征向量(eigenvector)
  - λ 被称为特征值 (eigenvalue)
- 特征值的解法
  - $A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ 移项后得到齐次线性方程组
  - $(\lambda I - A)\vec{\alpha} = 0$
  - 要使上式有非零解，需满足 $|\lambda I - A| = 0$
  - 即 $\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$
  - 展开后得到 $\lambda^n + (-a_{11} - a_{22} \dots - a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots = 0$
  - 上式被称为特征方程，等号左边被称为特征多项式
- 步骤
  1. $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow$ 求出 $\lambda_1 \dots \lambda_s$
  2. $|\lambda_i I - A|\vec{\alpha} = 0 \Rightarrow$ 求基础解系，求得的 α 称为属于 λ_i 的特征向量
- 练习：$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
  - $|\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0$
  - $\lambda^2 - 2\lambda - 9 = 0$
  - $\lambda_1 = 4 \quad or \quad \lambda_2 = -2$
  - 当 $\lambda_1 = 4$ 时
    - $|4I - A|\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\vec{\alpha} = 0$
    - $|4I - A| = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - $\Rightarrow x_1 = x_2$
    - $\Rightarrow \vec{\alpha} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - 当 $\lambda_1 = -2$ 时

        - $|4I - A| = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
        - $\Rightarrow -5x_1 = x_2$
        - $\Rightarrow \vec{\alpha} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

19.2 几个例子

- 例1：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
    - $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$
    - $= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$
    - $= (\lambda-5)(\lambda+1)^2 = 0$
    - 即 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
    - 当 $\lambda = 5$ 时
        - $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    - 当 $\lambda = -1$ 时
        - $\vec{\alpha} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 例2：$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$
    - $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-a \end{vmatrix} = 0$
    - $(\lambda-a)^n = 0$
    - $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = a$
    - $\lambda I - A = 0\vec{\alpha} = 0$
    - $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
    - 故 $\vec{\alpha} = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{e_n}$
    - 其中 $\overrightarrow{e_1} = (1,0,\dots 0)^T, \overrightarrow{e_2} = (0,1,\dots 0)^T \dots \overrightarrow{e_n} = (0,0,\dots 1)^T$
- 例3
    - 平面直角坐标系中$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$绕原点旋转 θ 得到$\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}$
    - 有 $\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，其中 $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$
    - 求 A 的特征向量

- $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & \lambda - cos\theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda cos\theta + 1 = 0$
- 当 $\cos\theta \neq \pm 1$，即 $\theta \neq k\pi$ 时，无实根
- 当 $\cos\theta = 1$，即 $\theta = 2k\pi$ 时
  - $\lambda = 1$
  - $\Rightarrow \lambda I - A = 0$
  - $\Rightarrow \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$
- 当 $\cos\theta = -1$，即 $\theta = (2k+1)\pi$ 时
  - $\lambda = -1$
  - $\Rightarrow \lambda I - A = 0$
  - $\Rightarrow \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$

19.3 基本性质

- 性质1
  - 内容
    - 若 λ_0 是 $A_{n\times n}$ 的特征值，则 A^2 有一个特征值 λ_0^2
  - 证明
    - $A\vec{\alpha} = \lambda_0\vec{\alpha}$
    - $A(A\vec{\alpha}) = A(\lambda_0\vec{\alpha})$
    - $A^2\vec{\alpha} = \lambda_0 A\vec{\alpha} = \lambda_0^2\vec{\alpha}$
    - $\Rightarrow \lambda_0^2$ 是 A 的特征值
- 性质2
  - 内容
    - 若 λ_0 是 $A_{n\times n}$ 的特征值，则 $kI - A$ 有特征值 $k - \lambda_0$
  - 证明
    - $(kI - A)\vec{\alpha} = kI\vec{\alpha} - A\vec{\alpha} = k\vec{\alpha} - \lambda_0\vec{\alpha} = (k - \lambda_0)\vec{\alpha}$
  - 推广
    - 关于 A 的任意矩阵多项式 $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$
    - 都有特征值 $a_n\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_0 + a_0$
- 性质3
  - 内容
    - 若 λ_0 是可逆矩阵 $A_{n\times n}$ 的特征值，则 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda_0}$
  - 证明
    - $A\vec{\alpha} = \lambda_0\vec{\alpha}$
    - $A^{-1}(A\vec{\alpha}) = A^{-1}(\lambda_0\vec{\alpha})$

        - $\vec{\alpha} = \lambda_0 A^{-1}\vec{\alpha}$
        - $\frac{1}{\lambda_0}\vec{\alpha} = A^{-1}\vec{\alpha}$
    - 推广
        - 若 λ_0 是可逆矩阵 $A_{n\times n}$ 的特征值，则 A^* 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda_0}$
        - $A^*\vec{\alpha} = |A|A^{-1}\vec{\alpha} = \frac{|A|}{\lambda_0}\vec{\alpha}$
- 定理1
    - 内容
        - 若 A 奇异，则 A 有特征值 0
        - 若 A 非奇异，则 A 特征值非零
    - 证明
        - $|\lambda I - A| = 0$
        - 若 A 奇异，即 $|A| = 0$，则显然 $\lambda = 0$ 是上式的根
        - $|A| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$
- 定理2
    - 内容
        - A 与 A^T 有相同的特征值
        - 注：特征向量一般不相同
    - 证明
        - $|\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I - A^T| = 0$
- 定理3
    - 内容
        - 属于不同特征值的特征向量线性无关
    - 证明（两组特征向量）
        - 假设 $A\overrightarrow{\alpha_1} = \lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}, A\overrightarrow{\alpha_2} = \lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}$
        - $k_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\overrightarrow{\alpha_2} = 0$
        - $A(k_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\overrightarrow{\alpha_2}) = 0$
        - $k_1A\overrightarrow{\alpha_1} + k_2A\overrightarrow{\alpha_2} = 0$
        - $k_1\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2} = 0$
        - 联立 $\begin{cases} k_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\overrightarrow{\alpha_2} = 0 \\ k_1\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1} + k_2\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{\alpha_1} = 0$
        - 又因为 $k_1 \neq 0, \overrightarrow{\alpha_1} \neq 0$
        - 所以 $k_1 = 0$

        - 代回 $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}=0$ 得 $k_2=0$
        - $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}=0$ 的解为 $\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{\alpha_1}$ 与 $\overrightarrow{\alpha_2}$ 线性无关
    - 证明
        - 假设 $A\overrightarrow{\alpha_3}=\lambda_2\overrightarrow{\alpha_3}$
        - $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\overrightarrow{\alpha_3}=0$
        - $A(k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\overrightarrow{\alpha_3})=0$
        - $k_1\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\lambda_3\overrightarrow{\alpha_3}=0$
        - 联立 $\begin{cases}k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\overrightarrow{\alpha_3}=0\\k_1\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\lambda_3\overrightarrow{\alpha_3}=0\end{cases}$
        - $\Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda_3)\overrightarrow{\alpha_1}+k_2(\lambda_2-\lambda_3)\overrightarrow{\alpha_2}=0$
        - $\Rightarrow k_1=0,k_2=0$
        - 代回 $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+k_2\overrightarrow{\alpha_2}+k_3\overrightarrow{\alpha_3}=0$ 得 $k_3=0$
        - 以此类推可以得到 $\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_s}$ 均线性无关
- 根与系数的关系
    - 对于方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 有
        - $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
        - $=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$
        - $=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n)x^{n-2}$ $+\cdots+(-1)^nx_1x_2\dots x_n$
    - 对比系数得根与系数的关系
        - $x_1+x_2+\cdots+x_n=a_{n-1}$
        - $x_1x_2\dots x_n=(-1)^na_0$
        - $x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n=a_{n-2}$
- 定理4
    - 内容
        - 若 $A_{n\times n}$ 有特征值 $\lambda_1\dots\lambda_n$
        - 则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$
    - 备注
        - 矩阵对角线上的元素 a_{ii} 之和被称为矩阵的迹
    - 证明
        - $|\lambda I-A|=0$
        - $\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\dots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\dots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\dots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$
        - $\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

        - 根据根与系数的关系有
        - $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$
        - $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=(-1)^n a_0$
        - 将 $\lambda=0$ 代入 $|\lambda I-A|=\lambda^n\ldots+a_1\lambda+a_0$ 得 $a_0=(-1)^n|A|$
        - 故 $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=(-1)^n a_0=(-1)^n(-1)^n|A|=|A|$
- 例题
    - $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&x&0\\4&2&1\end{pmatrix}$，已知 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，求 x 和 λ_3
    - 法一
        - $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+1+x\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_3=3\\ x=4\end{cases}$
        - 但不完全，需代回检验
    - 法二
        - $|\lambda I-A|=0$
        - $\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\-2&\lambda-x&0\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=0$
        - $(\lambda-1)\begin{pmatrix}\lambda-1&1\\-2&\lambda-x\end{pmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-x)+2]=0$
        - 将 $\lambda_2=2$ 代入得
        - $(2-1)(2-x)+2=0$
        - $\Rightarrow x=4$
        - $(\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-4)+2]=0$
        - $\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$
        - $\Rightarrow\lambda_3=3$

第20讲 相似矩阵与矩阵对角化

2017年7月9日　　21:32

20.1 矩阵的相似

- 定义：相似
  - 对于矩阵 $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ ，存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$
  - 则称矩阵 A 和矩阵 B 相似，记作 $A\sim B$
- 相似是一种等价关系
  - 反身性：$A\sim A$
    - $A = I^{-1}AI$
    - $\Rightarrow A\sim A$
  - 对称性：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$
    - $A\sim B$
    - $\Rightarrow B = P^{-1}AP$
    - $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$
    - $\Rightarrow A\sim B$
  - 传递性，若 $A\sim B, B\sim C$，则 $A\sim C$
    - $A\sim B, B\sim C$
    - $\Rightarrow \begin{cases} B = P_1^{-1}AP_1 \\ C = P_2^{-1}BP_2 \end{cases}$
    - $\Rightarrow C = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2)$
    - $\Rightarrow A\sim C$
- 矩阵关系
  - 相似：$B = P^{-1}AP$
  - 等价：$B = PAQ$
  - 相似矩阵一定等价
  - 等价矩阵不一定相似
- 性质1
  - 内容
    - 相似的矩阵有相同的特征值
    - 但特征向量一般不相同

- 证明
  - $A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP$
  - $|\lambda I - A| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP| = |\lambda I - B| = 0$
- 注：反之不成立（必要条件，但不充分）
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有相同特征值 $\lambda = 1$
  - 将与 A 相似的矩阵记为 C 则
  - $P^{-1}AP = P^{-1}IP = I$
  - $\Rightarrow C = I \neq B$
  - 故 B 与 A 不相似

- 性质2
  - 相似矩阵有相同的秩
    - $A \sim B$
    - $\Rightarrow B = P^{-1}AP$
    - $\Rightarrow r(B) = r(A)$
  - 相似矩阵有相等的行列式
    - $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|$
  - 相似矩阵有相等的可逆性，且可逆时 $A^{-1} \sim B^{-1}$
    - 由于行列式相同， 可逆性必然相同
    - $A \sim B$
    - $\Rightarrow B = P^{-1}AP$
    - $\Rightarrow B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$
    - $\Rightarrow B^{-1} \sim A^{-1}$
  - 相似矩阵有相等的迹
    - $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

20.2 可对角化条件

- 定义：可对角化
  - 矩阵 A 是否和对角矩阵相似
- 可对角化的意义
  - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{100} & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix}$
  - 若 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则存在 P

- $A^{100}=P^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P\ldots P^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P=P^{-1}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^{100}P$

- 定理1
  - 内容
    - $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量
  - 证明必要性
    - $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$
    - $\exists P\ \ s.t. P^{-1}AP=\Lambda$
    - $\Rightarrow AP=P\Lambda$
    - 设 $P=(\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n})$
    - $A(\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n})=(\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n})\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$
    - $\Rightarrow(A\overrightarrow{\alpha_1},\ldots,A\overrightarrow{\alpha_n})=(\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1},\ldots,\lambda_n\overrightarrow{\alpha_n})$
    - $\Rightarrow\begin{cases}A\overrightarrow{\alpha_1}=\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}\\ \vdots\\ A\overrightarrow{\alpha_n}=\lambda_1\overrightarrow{\alpha_n}\end{cases}$
    - 即为特征向量的定义
    - 又因为 P 可逆，$\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n}$ 均线性无关
  - 证明充分性
    - 将 A 线性无关的特征向量记为 $\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n}$
    - 构造 $P=(\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_n})$
    - 下略，只需按证明必要性的步骤倒退即可
  - 推论
    - 如果矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化
- 定理2
  - 内容
    - 若矩阵的特征方程有重根
    - 且重根 λ_i 重数 n_i 等于对应的基础解系中向量个数
    - 则矩阵可对角化
    - $n-r(\lambda_i I-A)=n_i$
  - 证明
    - 取自 λ_1 的特征向量记为 $\overrightarrow{\alpha_1}\ldots\overrightarrow{\alpha_s}\ (s=n_1)$

        - 取自 λ_2 的特征向量记为 $\overrightarrow{\beta_1}\dots\overrightarrow{\beta_t}\ (t=n_2)$
        - 构造 $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+k_s\overrightarrow{\alpha_s}+l_1\overrightarrow{\beta_1}+\cdots l_t\overrightarrow{\beta_t}=0$
        - 以下使用反证法，证明 $k_i=0,l_j=0$
        - 假设 $k_i\neq 0,l_j\neq 0$
        - $k_1\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+k_s\overrightarrow{\alpha_s}=-\left(l_1\overrightarrow{\beta_1}+\cdots l_t\overrightarrow{\beta_t}\right)$
        - 将上式记为 $\vec{\alpha}=k_1\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+k_s\overrightarrow{\alpha_s}=-\left(l_1\overrightarrow{\beta_1}+\cdots l_t\overrightarrow{\beta_t}\right)$
        - $\vec{\alpha}=k_1\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+k_s\overrightarrow{\alpha_s}\Rightarrow A\vec{\alpha}=\lambda_1\vec{\alpha}$
        - $\vec{\alpha}=-\left(l_1\overrightarrow{\beta_1}+\cdots l_t\overrightarrow{\beta_t}\right)\Rightarrow A\vec{\alpha}=\lambda_2\vec{\alpha}$
        - 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾
        - 故 $k_i=0,l_j=0$
- 例题：$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&4&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 是否可对角化，并求 A^5
    - $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\2&\lambda-4&2\\2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\2&\lambda-2&2\\2&\lambda-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\2&1&2\\2&1&\lambda\end{vmatrix}$
    - $=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\2&1&2\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$
    - $\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2\quad or\quad\lambda_3=1$
    - 当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时
        - $\lambda I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$
        - $r\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=1$
        - $n-r(\lambda_i I-A)=n_i\Rightarrow$ 可对角化
        - $(\lambda I-A)\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}\vec{\alpha}=0$
        - $\Rightarrow\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
    - 当 $\lambda_3=1$ 时
        - 解得 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
    - $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$,且 $P^{-1}AP=\Lambda$
    - 即 $A=P^{-1}\Lambda P$
    - $\Rightarrow A^5=(P^{-1}\Lambda P)^5=P^{-1}\Lambda^5P=P^{-1}\begin{pmatrix}32&&\\&32&\\&&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-62&94&-62\\-62&62&-30\\1&31&-31\end{pmatrix}$

20.3 约当标准形简介

- k阶约当块
  - $J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$
- 约当矩阵
  - $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_1)\end{pmatrix}$
  - 试判断
    - $\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$ 是
    - $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 是
    - $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 是
    - $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 否
    - $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 否
  - 所有三阶约当矩阵的类型
    - $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$
- 定理
  - 任意一个矩阵 $A_{n\times n}$ 都和约当矩阵相似
  - 且约当矩阵除约当排块排序外唯一
- 例题
  - $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$
  - 属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$
  - 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ -1\end{pmatrix}$
  - 由于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量不等于重数

- A 不可对角化，其约当标准形为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

第21讲 实对称矩阵

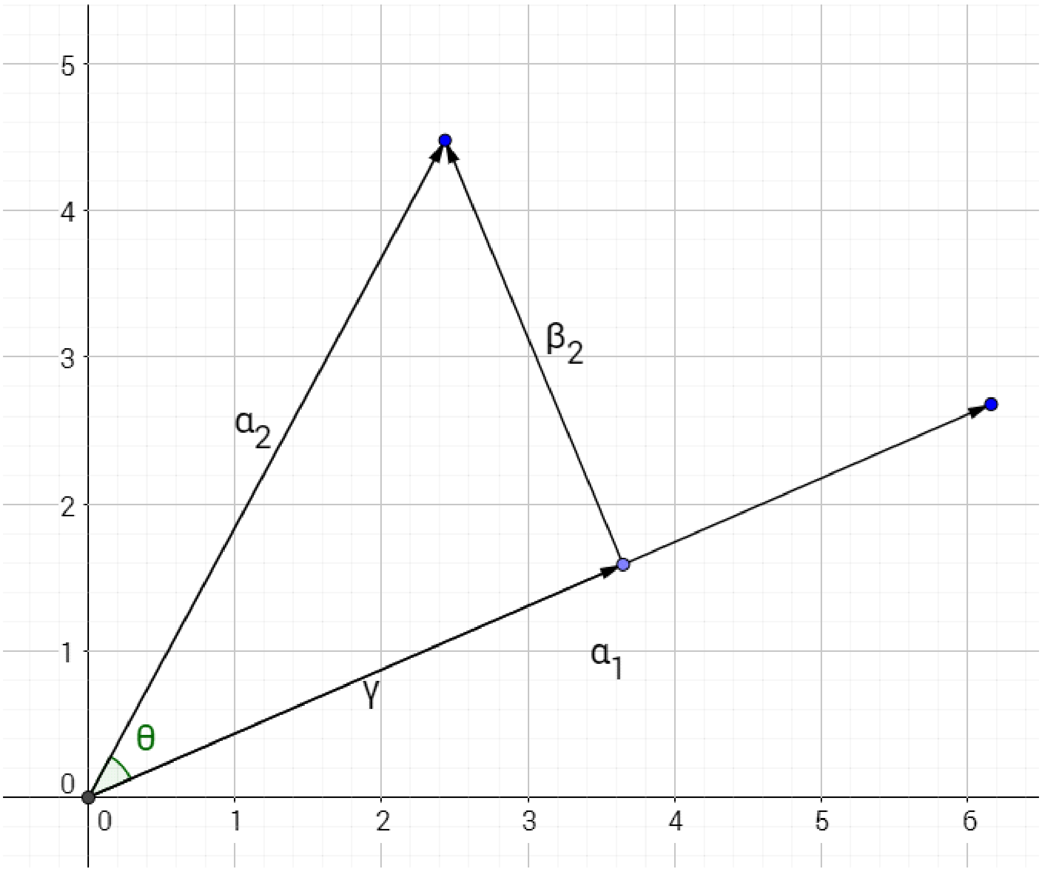
2017年7月12日 17:44

21.1 正交向量组

- 单位化
  - $\frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$
- 正交（垂直）
  - $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^T \vec{\beta} = 0$
- 正交向量组
  - 向量非零
  - 两两正交
- 定理
  - 内容
    - 正交向量组线性无关
  - 证明
    - 假设 $\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_s}$ 正交
    - 构造 $k_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots k_s\overrightarrow{\alpha_s} = 0$
    - $\overrightarrow{\alpha_1}\,(k_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots k_s\overrightarrow{\alpha_s}) = 0$
    - $k_1\overrightarrow{\alpha_1}^2 + 0 + \cdots + 0 = 0$
    - $\because \overrightarrow{\alpha_1}^2 \neq 0$
    - $\therefore k_1 = 0$
    - 同理 $k_i = 0\ (i = 1,2 \dots s)$

21.2 施密特正交化

- 两个向量施密特正交化（几何理解）



- 假设 $\{\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\}$ 施密特正交化得到 $\{\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2}\}$
- 则 $\begin{cases}\overrightarrow{\beta_1}=\overrightarrow{\alpha_1}\\ \overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\vec{\gamma}\end{cases}$
- $\because \overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}=\|\overrightarrow{\alpha_1}\|\|\overrightarrow{\alpha_2}\|\cos\theta=\|\overrightarrow{\alpha_1}\|\|\vec{\gamma}\|$
- $\therefore \|\vec{\gamma}\|=\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}}{\|\overrightarrow{\alpha_1}\|}$
- $\Rightarrow \vec{\gamma}=\|\vec{\gamma}\|\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}}{\|\overrightarrow{\alpha_1}\|}=\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}}{\|\overrightarrow{\alpha_1}\|^2}\overrightarrow{\alpha_1}=\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}}{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_1}}\overrightarrow{\alpha_1}$
- $\begin{cases}\overrightarrow{\beta_1}=\overrightarrow{\alpha_1}\\ \overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\vec{\gamma}=\overrightarrow{\alpha_2}-\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}}{\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_1}}\overrightarrow{\alpha_1}\end{cases}$
- $\Rightarrow \overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\dfrac{\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}$
- 证明 $\{\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2}\}$ 正交
- $\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\beta_1}\cdot\left(\overrightarrow{\alpha_2}-\dfrac{\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}\right)=\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}-\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}=0$

- 施密特正交化过程
  - 假设 $\overrightarrow{\alpha_1}\dots\overrightarrow{\alpha_s}$ 线性无关
  - $\overrightarrow{\beta_1}=\overrightarrow{\alpha_1}$
  - $\overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\dfrac{\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}$

- $\overrightarrow{\beta_3}=\overrightarrow{\alpha_3}-\frac{\overrightarrow{\alpha_3}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}-\frac{\overrightarrow{\alpha_3}\cdot\overrightarrow{\beta_2}}{\overrightarrow{\beta_2}\cdot\overrightarrow{\beta_2}}\overrightarrow{\beta_2}$
    - $\vdots$
    - $\overrightarrow{\beta_i}=\overrightarrow{\alpha_i}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\overrightarrow{\alpha_i}\cdot\overrightarrow{\beta_j}}{\overrightarrow{\beta_j}\cdot\overrightarrow{\beta_j}}\overrightarrow{\beta_j}$
    - $\vdots$
    - $\overrightarrow{\beta_s}=\overrightarrow{\alpha_3}-\frac{\overrightarrow{\alpha_s}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}\ldots-\frac{\overrightarrow{\alpha_s}\cdot\overrightarrow{\beta_{s-1}}}{\overrightarrow{\beta_{s-1}}\cdot\overrightarrow{\beta_{s-1}}}\overrightarrow{\beta_{s-1}}$
- $\overrightarrow{\beta_i}$ 前的系数是如何求得的：待定系数法
    - 以 $\overrightarrow{\beta_2}$ 为例
        - $\overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-k\overrightarrow{\beta_1}$
        - $\because\overrightarrow{\beta_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}=\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}-k\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}=0$
        - $\therefore k=\frac{\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}$
    - 以 $\overrightarrow{\beta_3}$ 为例
        - $\begin{cases}\overrightarrow{\beta_3}\cdot\overrightarrow{\beta_1}=0\\\overrightarrow{\beta_3}\cdot\overrightarrow{\beta_2}=0\end{cases}\Rightarrow\cdots$
- 单位正交向量组
    - 正交化+单位化
- 例：$\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{\alpha_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}$
    - 正交向量组 $\{\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\overrightarrow{\beta_3}\}$
    - $\overrightarrow{\beta_1}=\overrightarrow{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$
    - $\overrightarrow{\beta_2}=\overrightarrow{\alpha_2}-\frac{\overrightarrow{\alpha_2}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{4}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$
    - $\overrightarrow{\beta_3}=\overrightarrow{\alpha_3}-\frac{\overrightarrow{\alpha_3}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}{\overrightarrow{\beta_1}\cdot\overrightarrow{\beta_1}}\overrightarrow{\beta_1}-\frac{\overrightarrow{\alpha_3}\cdot\overrightarrow{\beta_2}}{\overrightarrow{\beta_2}\cdot\overrightarrow{\beta_2}}\overrightarrow{\beta_2}=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}-\frac{12}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{-32}{16}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$
    - 单位正交向量组 $\{\overrightarrow{\gamma_1},\overrightarrow{\gamma_2},\overrightarrow{\gamma_3}\}$
    - $\overrightarrow{\gamma_1}=\frac{\overrightarrow{\beta_1}}{\|\overrightarrow{\beta_1}\|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$
    - $\overrightarrow{\gamma_2}=\frac{\overrightarrow{\beta_2}}{\|\overrightarrow{\beta_2}\|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$

- $\overrightarrow{\gamma_3} = \frac{\overrightarrow{\beta_3}}{\|\overrightarrow{\beta_3}\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

21.3 正交矩阵

- 定义
  - 对于实矩阵 $Q_{n\times n}$
  - 若 $Q^TQ = I \Leftrightarrow QQ^T = I \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$
  - 则称其为正交矩阵
- 例子：$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  - $QQ^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- 性质1：$|Q| = 1 \quad or \quad -1 \Leftrightarrow |Q|^2 = 1$
  - $QQ^T = I$
  - $\Rightarrow |QQ^T| = |I|$
  - $\Rightarrow |Q||Q^T| = |Q|^2 = 1$
  - $\Rightarrow |Q| = 1 \quad or \quad -1$
- 性质2：若 Q 是正交矩阵，则 $Q^T = Q^{-1}$ 也是正交矩阵
  - 证明略
- 性质3：若 P, Q 都是正交矩阵，则 PQ 也是正交矩阵
  - $(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = Q^TQ = I$
- 定理：Q 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ 行(列)向量组是单位正交向量组
  - $Q = (\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} \dots \overrightarrow{\alpha_n})$
  - $Q^TQ = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha_1}^T \\ \overrightarrow{\alpha_2}^T \\ \vdots \\ \overrightarrow{\alpha_n}^T \end{pmatrix}(\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2} \dots \overrightarrow{\alpha_n}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_1} & \overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2} & \dots & \overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_n} \\ \overrightarrow{\alpha_2}^T\overrightarrow{\alpha_1} & \overrightarrow{\alpha_2}^T\overrightarrow{\alpha_1} & \dots & \overrightarrow{\alpha_2}^T\overrightarrow{\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overrightarrow{\alpha_n}^T\overrightarrow{\alpha_1} & \overrightarrow{\alpha_n}^T\overrightarrow{\alpha_2} & \dots & \overrightarrow{\alpha_n}^T\overrightarrow{\alpha_n} \end{pmatrix} = I$
  - $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha_i}^T\overrightarrow{\alpha_j} = 1 & (i = j) \\ \overrightarrow{\alpha_i}^T\overrightarrow{\alpha_j} = 0 & (i \neq j) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{单位} \\ \text{正交} \end{cases}$

21.4 实对称矩阵

- 定义
  - 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，满足 $\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ A^T = A \end{cases}$，则称其为实对称矩阵
- 定理1：实对称矩阵的特征值是实数
  - 证明略
- 定理2：实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交

- 已知 $A\overrightarrow{\alpha_1}=\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1},A\overrightarrow{\alpha_2}=\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$
- 要证 $\overrightarrow{\alpha_1}\perp\overrightarrow{\alpha_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\alpha_1}\cdot\overrightarrow{\alpha_2}=0$
- 构造 $\overrightarrow{\alpha_1}^TA\overrightarrow{\alpha_2}=\overrightarrow{\alpha_1}^T(A\overrightarrow{\alpha_2})=\overrightarrow{\alpha_1}^T(\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2})=\lambda_2\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}$
- 又因为 $\overrightarrow{\alpha_1}^TA\overrightarrow{\alpha_2}=\overrightarrow{\alpha_1}^TA^T\overrightarrow{\alpha_2}=(A\overrightarrow{\alpha_1})^T\overrightarrow{\alpha_2}=(\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1})^T\overrightarrow{\alpha_2}=\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}$
- 即 $\lambda_1\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}=\lambda_2\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}$
- 又因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$
- 故 $\overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}=0$

- 定理3：实对称矩阵 A 一定可对角化，且存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$
  - 证明略
- 例：$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$
  - $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$
  - 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时
  - $\begin{cases}\overrightarrow{\alpha_1}=(-2,1,0)^T\\\overrightarrow{\alpha_2}=(-2,0,1)^T\end{cases}\xRightarrow{\text{正交化}}\begin{cases}\overrightarrow{\beta_1}=(-2,1,0)^T\\\overrightarrow{\beta_2}=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T\end{cases}\xRightarrow{\text{单位化}}\begin{cases}\overrightarrow{\gamma_1}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^T\\\overrightarrow{\gamma_2}=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T\end{cases}$
  - 当 $\lambda_3=10$ 时
  - $\overrightarrow{\alpha_3}=(1,2,-2)^T\xRightarrow{\text{单位化}}\overrightarrow{\gamma_3}=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^T$
  - 故 $\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

第22讲 二次型

2017年7月12日　　23:17

22.1 二次型及其矩阵表示

- 二次型
  - 二次的齐次多项式
- 两个变元的二次型
  - $ax^2+bxy+cy^2$
- n 元二次型的一般形式
  - $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$
    $+a_{22}x^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$
  - 共 $n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 项
- 二次型矩阵
  - $f=\vec{x}^TA\vec{x}$
  - $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
  - 对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$

22.2 合同

- 引例
  - 如何判断 $ax^2+2bxy+cy^2=d$ 为抛物线或椭圆
  - 可以通过坐标变换(旋转)消去交叉项 $2bxy$
  - $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$
  - 此处取 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 得
  - $a'x'^2+c'y'^2=d'$
  - 上式被称为二次型的标准形式
  - 坐标变换用矩阵可以表示为
  - $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 其中 $|C|\neq 0$
  - 或写成 $\vec{x}=C\vec{y}$
  - 则原二次型可以表示为

- $f=\vec{x}^TA\vec{x}=(C\vec{y})^TA(C\vec{y})=\vec{y}^TC^TAC\vec{y}$
- 将 C^TAC 记为 B，则 $f=\vec{x}^TB\vec{x}$
- 我们将 A 与 B 之间的关系 $B=C^TAC$ 称为合同

- 定义
  - 若存在可逆矩阵 C，使得 $B=C^TAC$
  - 则称 A 与 B 之间的关系为合同(Congruence)
- 合同是一种等价关系
  - 反身性
    - $A=I^TAI$
  - 对称性
    - $B=C^TAC$
    - $\Rightarrow A=(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^{-1})^TBC^{-1}$
  - 传递性
    - $B=C_1^TAC_1, C=C_2^TBC_2$
    - $\Rightarrow C=C_2^TC_1^TAC_1C_2=(C_1C_2)^TA(C_1C_2)$
- 定理1
  - 内容
    - 对于任意对称矩阵 A，一定存在可逆矩阵 C
    - 使得 $C^TAC=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$
  - 证明
    - 由对称矩阵的性质得
    - 存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$
    - 又因为 Q 为正交矩阵，即 $Q^{-1}=Q^T$
    - $Q^TAQ=\Lambda$
    - 其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 为对角矩阵
- 矩阵的三种等价关系
  - 等价：$B=PAQ$
  - 相似：$A\sim B \Leftrightarrow B=P^{-1}AP$
  - 合同：$\mathrm{A}\simeq B \Leftrightarrow B=C^TAC$
- 矩阵的三种标准形
  - 等价：$D=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 相似：约当标准型 $J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$
- 合同：对角矩阵 $\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}$

22.3 二次型的标准形

- 二次型与合同
  - $B=C^TAC=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}$
  - $f=\vec{x}^TA\vec{x}\xrightarrow{\vec{x}=C\vec{y}}f=\vec{y}^TB\vec{y}=\vec{y}^T\vec{y}=a_1y_1^2+\cdots+a_ny_n^2$
- 配方法
  - 例1：$f=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$
    - $f=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2$
    - 令 $\begin{cases}y_1=x_1+\frac{x_2}{2}\\ y_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-\frac{y_2}{2}\\ x_2=y_2\end{cases}$
    - $\Rightarrow C=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
    - 即 $f=y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2$
    - 即 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{B=C^TAC}B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$
  - 例2：$f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$
    - 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$,即 $\vec{x}=C_1\vec{y}$
    - $f=2(y_1^2-y_2^2)-6(y_1-y_2)y_3+2(y_1+y_2)y_3$
    - 再令 $\begin{cases}z_1=\cdots\\ z_2=\cdots\\ z_3=\cdots\end{cases}$,即 $\vec{y}=C_2\vec{z}$
    - $\Rightarrow\vec{x}=(C_1C_2)\vec{z}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\vec{z}$
    - 即 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{B=C^TAC}B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$
- 初等变换法
  - 原理

- $C^TAC = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$
- $C = IP_1P_2 \dots P_s$
- $C^TAC = P_S^TP_{S-1}^T \dots P_2^TP_1^TAP_1P_2 \dots P_s$
- 即先对 A 做初等列变换，再做相应的初等行变换
- 构造 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}_{2n\times n}$ 做一系列初等变换可以得到 $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$

- 例：$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
  - 构造 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+=c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+=r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    $\xrightarrow[c_3+=c_1]{c_2-=\frac{1}{2}c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+=r_1]{r_2-=\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    $\xrightarrow{c_3-=4c_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-=4r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - 即 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$
- 注：标准形不唯一

22.4 二次型的规范形

- 标准形不唯一
  - 观察到上题中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 可以化为两种标准形
  - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$

- 二次型的规范形
  - $f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 \ldots - d_r y_r^2 + 0 y_{r+1}^2 + \cdots 0 y_n^2$
  - 令 $z_1 = \sqrt{d_1} y_1, z_2 = \sqrt{d_2} y_2 \ldots z_r = \sqrt{d_r} y_r$
  - 代入得 $f = z_1^2 + \cdots z_p^2 - z_{p+1}^2 \ldots - z_r^2$
  - 上式被称为二次型的规范形，其中 z_i 的系数为 ± 1
- 西尔维斯特惯性定理
  - 若 A 对称，则 $A \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
  - p：正惯性指标
  - $r - p$：负惯性指标
  - r：矩阵 A 的秩

第23讲 正定二次型

2017年7月13日 10:26

23.1 二次型的有定性

- 定义
  - 二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$，对于任意 $x\neq 0$
  - 若 $f(\vec{x})>0$ 恒成立，则称为正定
  - 若 $f(\vec{x})<0$ 恒成立，则称为负定
  - 若 $f(\vec{x})\geq 0$ 恒成立，则称为半正定
  - 若 $f(\vec{x})\leq 0$ 恒成立，则称为半负定
  - 以上统称为有定
  - 若 $f(\vec{x})>0$ 也可 $f(\vec{x})<0$ 则成为不定
- 例子
  - 正定：$f=x_1^2+x_2^2$，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
  - 负定：$f=-x_1^2-x_2^2$，$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
  - 半正定：$f=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
  - 半负定：$f=-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2$，$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$
  - 不定：$f=x_1^2-x_2^2$，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

23.2 正定性的判定

- 正定矩阵
  - 必须是对称矩阵
  - 对应的二次型是正定二次型
- 定理1：合同矩阵由相同有定性
  - $B=C^TAC$
  - 任取 $\vec{y}\neq 0$
  - $\vec{y}^TB\vec{y}=\vec{y}^TC^TAC\vec{y}=(C\vec{y})^TA(C\vec{y})$
  - $\because \vec{y}\neq 0,(C\vec{y})\neq 0,A$ 是正定矩阵
  - $\therefore \vec{y}^TB\vec{y}>0$
- 定理2：对角矩阵 $\begin{pmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow d_i>0\ (i=1\dots n)$

- $f = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2$

- 定理3：A 对称且正定 $\Leftrightarrow$ A 的规范形为 $I \Leftrightarrow A \simeq I \Leftrightarrow A = C^T C$
  - $\mathrm{A} \simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
  - $\because$ 对角线上的元素均大于零
  - $\therefore r = p = n$

- 推论1：A 正定 $\Leftrightarrow r = p = n$
  - 证明见定理3

- 推论2：A 正定 $\Rightarrow |A| > 0$
  - $A = C^T C$
  - $|A| = |C^T C| = |C^T||C| = |C|^2$
  - $\because$ C 可逆, 即 $|C| > 0$
  - $\therefore |A| > 0$
  - 反之不成立：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

- 定理4：A 对称且正定 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值都是正的
  - $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

- 顺序主子式
  - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
  - $|A_1| = a_{11}$
  - $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
  - $|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$
  - $|A_n| = |A|$

- 定理5：A 正定 $\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式 > 0

- 例：判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$的正定性
  - $|A_1| = 1 > 0$
  - $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$
  - $|A_3| = |A| = 1 > 0$
  - 故 A 正定

23.3 正定性的应用

- 求极值
  - 对于 n 元函数 $f(x_1,\dots,x_n)$
  - $f(\vec{x_0}+\vec{h}) = f(\vec{x_0}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x_0})h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\vec{x_0}+\theta\vec{h})h_i h_j + \cdots$
  - 其中 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$
  - 要求 $f(\vec{x_0})$ 的极值，首先需满足 $f_i(\vec{x_0}) = 0\ (i = 1 \dots n)$，即 $\vec{x_0}$ 为驻点
  - $f(\vec{x_0}+\vec{h}) = f(\vec{x_0}) + \frac{1}{2!}(h_1,\dots,h_n)H\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \cdots$
  - 其中 $H(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$被称为海赛矩阵
- 定理
  - $H(\vec{x_0})$ 正定 $\Rightarrow f(\vec{x_0})$ 为极小值
  - $H(\vec{x_0})$ 负定 $\Rightarrow f(\vec{x_0})$ 为极大值
  - $H(\vec{x_0})$ 不定 $\Rightarrow f(\vec{x_0})$ 不是极值
- 例：求 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - e^{x_1} - e^{x_2} + 2e^{x_3} - e^{x_3^2}$ 的极值
  - $\begin{cases} f_1 = 1 - e^{x_1} = 0 \\ f_2 = 1 - e^{x_2} = 0 \\ f_3 = 2e^{x_3} - 2x_3 e^{x_3^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $H = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{x_3} - 2e^{x_3^2} - 4x_3^2 e^{x_3^2} \end{pmatrix}$
  - $H(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -4e \end{pmatrix}$ 负定
  - 故驻点 $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为极大值

第24讲 线性空间(一)

2017年7月13日　14:13

24.1 线性空间的定义

- 线性空间最一般的定义
  - 非空集合 V 和 数域 P (一般为$\mathbb{R}$)
  - 可定义加法（对加法封闭）
    - $\alpha, \beta \in V \Rightarrow \alpha + \beta \in V$
  - 可定义数乘（对数乘封闭）
    - $\alpha \in V, k \in P \Rightarrow k\alpha \in V$
  - 八条性质
    1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
    2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
    3. $\alpha + (-\alpha) = 0$
    4. $\alpha + 0 = \alpha$
    5. $(kl)\alpha = k(l\alpha)$
    6. $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
    7. $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$
    8. $1\alpha = \alpha$
- 进一步的性质
  - 消去律：$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
    - $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$
    - $-\alpha + \alpha + \beta = -\alpha + \alpha + \gamma$
    - $\beta = \gamma$
  - 零向量唯一
    - 假设由两个零向量 0_1 和 0_2
    - 则 $0_1 + 0_2 = 0_1 = 0_2$
    - 故零向量唯一
  - 负向量唯一
    - 假设 $\alpha + \beta = 0, \alpha + \gamma = 0$
    - 法一：消去率
    - 法二：$\beta = \beta + 0 = \beta + \alpha + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$
  - $0\alpha = \vec{0}$

        - $\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = \alpha + \vec{0}$
        - 根据消去率有 $0\alpha = \vec{0}$
    - $k\vec{0} = \vec{0}$
        - $k\vec{0} + k\alpha = k(\vec{0} + \alpha) = k\alpha + \vec{0}$
        - 根据消去率有 $k\vec{0} = \vec{0}$
    - $(-1)\mathrm{\alpha} = -\mathrm{\alpha}$
        - $(-1)\mathrm{\alpha} + \mathrm{\alpha} = (-1+1)\mathrm{\alpha} = 0\mathrm{\alpha} = \vec{0}$
        - 又因为负向量唯一，故 $(-1)\mathrm{\alpha} = -\mathrm{\alpha}$
    - $k\alpha = 0 \Rightarrow k = 0 \ \ or \ \ a = \vec{0}$
        - 若 $k \neq 0$，则 $k^{-1}(k\alpha) = 1\alpha = \alpha = 0$

24.2 维数、基与坐标

- 维数 (dimension)
    - 若 V 中最多有 n 个线性无关的向量
    - 则称线性空间 V 的维数为 n
    - 记作 $dim(V) = n$
    - 注
        - $dim(\mathbb{R}^n) = n$
        - 所有 $deg \leq n$ 的多项式 $R_n[x]$ 的维数为 $n+1$
        - 所有多项式 $R[x]$ 不在线性空间的讨论范围
- 基 (basis)
    - n 维线性空间内 n 个线性无关的向量（不唯一）
- 坐标 (coordinate)
    - 若 $\overrightarrow{e_1} \dots \overrightarrow{e_n}$ 为一组基
    - 则 $\vec{\mathrm{\alpha}}, \overrightarrow{e_1} \dots \overrightarrow{e_n}$ 一定线性相关
    - 即 $\vec{\alpha} = k_1\overrightarrow{e_1} + \cdots k_n\overrightarrow{e_n}$
    - 且 $k_1 \dots k_n$ 唯一
    - 我们将 $(k_1 \dots k_n)$ 称作坐标
- 例子
    - $\mathbb{C}$ 可以看作是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间
        - 基为 1 和 i
        - $\vec{\alpha} = 1a + bi \in \mathbb{C} \ \ (a, b \in \mathbb{R})$
    - $\mathbb{C}$ 可以看作是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间

    - 基为 1
    - $\vec{\alpha} = 1\vec{\alpha} \in \mathbb{C}\ \ (\vec{\alpha} \in \mathbb{C})$
  - $\mathbb{R}^n$ 最常用的一组基为
    - $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0 \dots 0)^T$
    - $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0 \dots 0)^T$
    - $\vdots$
    - $\overrightarrow{e_n} = (0,0,0 \dots 1)^T$
  - $R_n[x]$ 最常用的一组基为
    - $1, x, x^2, x^3 \dots x^n$

24.3 线性子空间

- 定义
  - V 是线性空间，$W \subset V$
  - 若 W 对于加法、数乘也构成线性空间，则称 W是子空间
- 定理
  - 若 $W \subset V$ 且 W 对加法、数乘封闭，则 W 为子空间
- 平凡子空间
  - V
  - $\{\vec{0}\}$
- 常用子空间的例子
  - $R_n[x]$ 是 $R[x]$ 的子空间
  - $A\vec{x} = 0$ 的解集
    - 记为 $N(A)$ ，又称零空间 (null space)
    - 基为基础解系
    - 维数为 $n - r(A)$
  - 生成空间
    - 由 $\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_s}$ 生成的空间
    - $\{k_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + k_s\overrightarrow{\alpha_s} | k_1 \dots k_s \in \mathbb{R}\}$
    - 记为 $L(\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_s})$

第25讲 线性空间(二)

2017年7月13日　　14:14

25.1 基变换与坐标变换

- 引入
  - 假设 n 维线性空间 V 有两组基
    - $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$ 和 $\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}'$
  - 两组基之间有以下关系
    - $\vec{e_1}' = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \cdots a_{n1}\vec{e_n}$
    - $\vec{e_2}' = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + \cdots a_{n2}\vec{e_n}$
    - $\vdots$
    - $\vec{e_n}' = a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \cdots a_{nn}\vec{e_n}$
  - 可讲上式形式上记为 $(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}') = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A$
  - 其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 基变换
  - $(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}') = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A$
  - 可逆矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
  - A 被称为转移矩阵或过渡矩阵 (transition matrix)
- 性质
  - $[(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A]B = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})(AB)$
  - $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A + (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})B = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})(A+B)$
  - $(\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A + (\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}')A = (\vec{e_1} + \vec{e_1}', \dots, \vec{e_n} + \vec{e_n}')A$
- 坐标变换
  - 对于 $\vec{\alpha} \in V$，可以分别用两组基来表示
    - $\vec{\alpha} = a_1\vec{e_1} + \cdots + a_n\vec{e_n} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
    - $\vec{\alpha} = b_1\vec{e_1}' + \cdots + b_n\vec{e_n}' = (\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}')\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
  - 将 $(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}') = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A$ 代入得

        - $\vec{\alpha} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})\left(A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)$
    - 因为同一组基下的坐标表示唯一，有
        - $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- 例题
    - 假设 $V = \mathbb{R}^n$ 有两组基
        - $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
        - $\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e_n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
    - 若 $\vec{\alpha}$ 在两组基下的坐标分别为 $(x_1 \dots x_n)^T, (y_1 \dots y_n)^T$
        - 则 $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_1 + y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_1 + \cdots y_n = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 \\ \vdots \\ y_n = x_n - x_{n-1} \end{cases}$
    - 两组基之间的关系为
        - $(\vec{e_1}' \dots \vec{e_n}') = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})A$
        - 其中转移矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
    - 故坐标变换为
        - $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
        - $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

25.2 线性空间的同构

- 向量和坐标之间的映射
    - n 维线性空间 V 有一组基 $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$
    - 对于任意 $\vec{\alpha} \in V$ 都存在
        - $\vec{\alpha} = a_1\vec{e_1} + \cdots + a_n\vec{e_n} \in V$
        - $\vec{\alpha}$ 的坐标为 $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$
    - 即存在映射

        - $\mathrm{V} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^n$
        - $\vec{\alpha} \overset{\sigma}{\mapsto} (a_1, \ldots, a_n)^T$
    - 即 $\sigma(\vec{\alpha}) = (a_1, \ldots, a_n)^T$
    - 故此映射是一一映上的（一一对应）
    - 且此映射还需满足
    - 对加法封闭
        - $\vec{\alpha}$: $(a_1, \ldots, a_n)^T$
        - $\vec{\beta}$: $(b_1 \ldots b_n)^T$
        - $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = a_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n} + b_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{e_n}$
        - $= (a_1 + b_1)\overrightarrow{e_1} + \cdots + (a_n + b_n)\overrightarrow{e_n}$
        - $\sigma(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)^T$
        - $= (a_1, \ldots, a_n)^T + (b_1 \ldots b_n)^T = \sigma(\vec{\alpha}) + \sigma(\vec{\beta})$
    - 对数乘封闭
        - $\sigma(k\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha})$
        - 证明略
- 同构
    - 数域 P 上的两个线性空间 V, V'
    - 若存在一个由 V 到 V' 的一一对应 σ
    - 使得 $\sigma(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \sigma(\vec{\alpha}) + \sigma(\vec{\beta})$ 且 $(k\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha})$
    - 则称 V 与 V' 同构 (Isomorphic)
    - σ 被称为同构映射 (Isomorphism)
- 注：任意一个 n 维线性空间 V 都与 $\mathbb{R}^n$ 同构
- 同构的性质
    - $\sigma(0) = 0$
        - $\sigma(k\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha})$ 令 $k = 0$
    - $\sigma(-\vec{\alpha}) = -\sigma(\vec{\alpha})$
        - $\sigma(k\vec{\alpha}) = k\sigma(\vec{\alpha})$ 令 $k = -1$
    - 保持线性组合
        - $\sigma(k_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots k_s\overrightarrow{\alpha_s}) = k_1\sigma(\overrightarrow{\alpha_1}) + \cdots + k_s\sigma(\overrightarrow{\alpha_s})$
    - 保持线性相关性
        - $\overrightarrow{\alpha_1} \ldots \overrightarrow{\alpha_s}$ 线性相关$\Leftrightarrow$ $\sigma(\overrightarrow{\alpha_1}) \ldots \sigma(\overrightarrow{\alpha_s})$ 线性相关
        - $\overrightarrow{\alpha_1} \ldots \overrightarrow{\alpha_s}$ 线性无关$\Leftrightarrow$ $\sigma(\overrightarrow{\alpha_1}) \ldots \sigma(\overrightarrow{\alpha_s})$ 线性无关
    - V 与 V' 同构 $\Leftrightarrow$ $dim(V) = dim(V')$

        - 证明暂略
    - 同构映射的逆映射还是同构映射
        - 同构映射 σ: $V \to V'$
        - 先证逆映射对加法封闭
        - 即要证 $\sigma^{-1}(\sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}))=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
        - $\sigma[\sigma^{-1}(\sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}))]=\sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta})=\sigma(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
        - 又因为 σ 一一对应
        - 故 $\sigma^{-1}(\sigma(\vec{\alpha})+\sigma(\vec{\beta}))=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
        - 再证逆映射对数乘封闭
        - $\sigma[\sigma^{-1}(k\sigma(\vec{\alpha}))]=k\sigma(\vec{\alpha})=\sigma(k\vec{\alpha})$
        - 又因为 σ 一一对应
        - 故 $\sigma^{-1}(k\sigma(\vec{\alpha}))=k\vec{\alpha}$
    - 两个同构映射的乘积(复合)还是同构映射
        - 同构映射 σ: $V \to V'$ 和 τ: $V' \to V''$
        - $\tau\left(\sigma\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right)=\tau\left(\sigma(\vec{\alpha})+\sigma\left(\vec{\beta}\right)\right)=\tau\left(\sigma(\vec{\alpha})\right)+\tau\left(\sigma(\vec{\alpha})\right)$
        - 证明数乘略
- 定理1：同构是一种等价关系
    - 反身性：V 与 V 同构
        - $\sigma(\vec{\alpha})=\vec{\alpha}$
    - 对称性：若 V 与 V' 同构，则 V' 与 V 同构
        - 同构映射的逆映射还是同构映射
    - 传递性：若 V 与 V' 同构，V' 与 V'' 同构，则 V 与 V'' 同构
        - 两个同构映射的乘积(复合)还是同构映射
- 定理2：$dim(V)=\dim(V') \Rightarrow V$ 与 V' 同构
    - n 维线性空间 V 与 $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ 同构
    - n 维线性空间 V' 与 $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ 同构
    - 根据同构的传递性得 V 与 V' 同构

第26讲 线性变换

2017年7月14日 15:33

26.1 定义与性质

- 变换
  - 线性空间 V 到自身的映射
- 定义：线性变换
  - 存在线性空间 V 和线性变换 A ，满足以下性质
  - 保持向量的加法
    - $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$
    - $A(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = A(\vec{\alpha}) + A(\vec{\beta})$
  - 保持向量的数乘
    - $A(k\vec{\alpha}) = kA(\vec{\alpha})$
- 例子
  - 零变换
    - $0(\vec{\alpha}) = \vec{0}$
  - 恒等变换（恒同变换）
    - $I(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$
  - 缩放变换
    - $K(\vec{\alpha}) = k\vec{\alpha}$
  - $\mathbb{R}^2$ 上的旋转变换
    - $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
    - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - 矩阵变换
    - $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
    - $\vec{\alpha} \mapsto A\vec{\alpha}$
  - 求导运算
    - $D(f(x)) = f'(x)$
  - 投影
    - $\Pi_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \|\vec{\beta}\| \cdot \cos\theta \cdot \frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$

        - $\because \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\cos\theta$
        - $\therefore \Pi_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}\cdot\vec{\alpha}$
- 性质
    - 作用在特殊的向量
        - $A(\vec{0}) = \vec{0}$
        - $A(-\vec{\alpha}) = -A(\vec{\alpha})$
    - 保持线性组合（关系）
        - $\vec{\alpha} = k_1\vec{\epsilon_1} + \cdots + k_s\vec{\epsilon_s}$
        - $\Rightarrow A(\vec{\alpha}) = k_1A(\vec{\epsilon_1}) + \cdots + k_sA(\vec{\epsilon_s})$
    - 保持线性相关性
        - $\vec{\alpha_1}\ldots\vec{\alpha_s}$ 线性相关 $\Rightarrow A(\vec{\alpha_1})\ldots A(\vec{\alpha_s})$ 线性相关
        - 但不保持线性无关性，如零变换

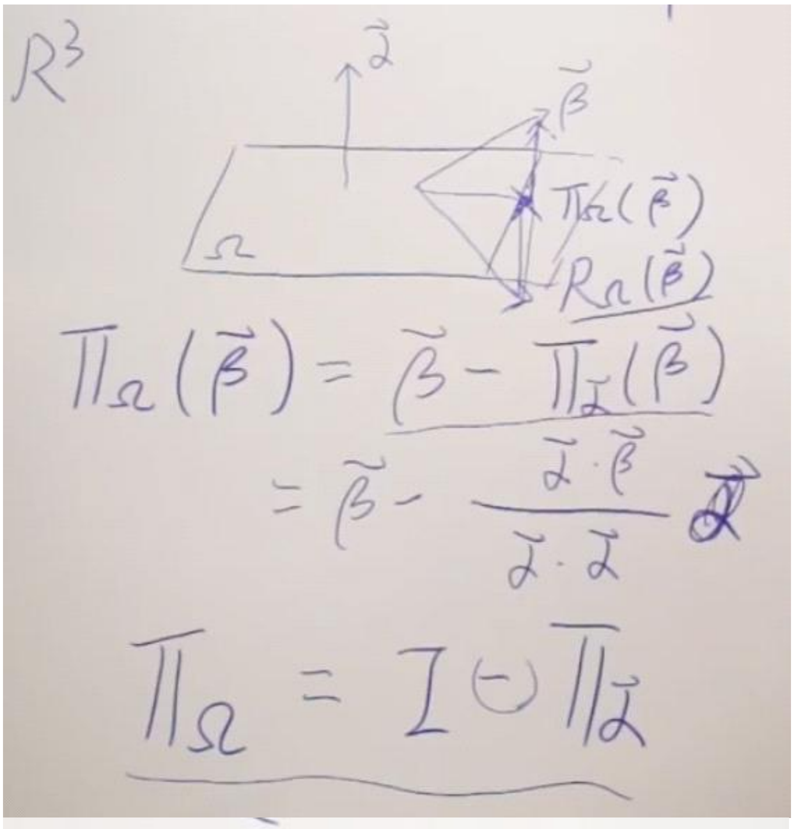
26.2 线性变换的运算

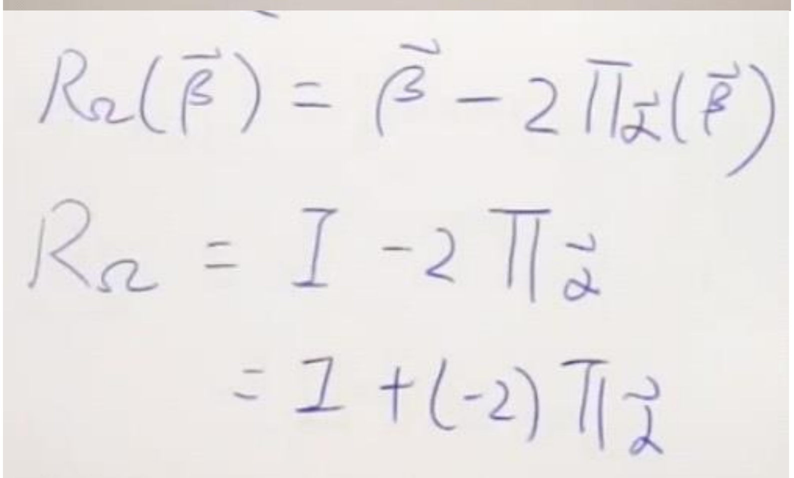
- 线性变换的运算
    - 加法
        - $(A+B)(\vec{\alpha}) = A(\vec{\alpha}) + B(\vec{\alpha})$
    - 数乘
        - $(kA)(\vec{\alpha}) = kA(\vec{\alpha})$
    - 乘法（复合）
        - $AB(\vec{\alpha}) = A\big(B(\vec{\alpha})\big)$
    - 逆变换
        - 若 $AB = BA = I$
        - 则 B 叫做 A 的逆变换，记作 A^{-1}
- 线性变换乘法的性质
    - 满足结合律
        - $(AB)C = A(BC)$
        - 证明略
    - 不满足交换律
        - 由于矩阵乘法不满足交换律
    - 恒同变换的单位元 I
        - $IA = A = AI$
- 线性变换的**乘积** AB 是线性变换

- 证明：线性变换的乘积对加法封闭
  - $AB(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
  - $=A\left(B(\vec{\alpha})+B(\vec{\beta})\right)$
  - $=A(B(\vec{\alpha}))+A\left(B(\vec{\beta})\right)$
  - $=AB(\vec{\alpha})+AB(\vec{\alpha}\vec{\beta})$
- 证明：线性变换的乘积对数乘封闭
  - $AB(k\vec{\alpha})=A(kB(\vec{\alpha}))=kAB(\vec{\alpha})$

- 线性变换 A 的**逆变换** A^{-1} 是线性变换
  - 证明：线性变换的逆变换对加法封闭
    - $A^{-1}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
    - $=A^{-1}(I(\vec{\alpha})+I(\vec{\beta}))$
    - $=A^{-1}(AA^{-1}(\vec{\alpha})+AA^{-1}(\vec{\beta}))$
    - $=A^{-1}[A(A^{-1}(\vec{\alpha})+A^{-1}(\vec{\beta}))]$
    - $=A^{-1}A\left(A^{-1}(\vec{\alpha})+A^{-1}(\vec{\beta})\right)$
    - $=I\left(A^{-1}(\vec{\alpha})+A^{-1}(\vec{\beta})\right)$
    - $=A^{-1}(\vec{\alpha})+A^{-1}(\vec{\beta})$
  - 证明：线性变换的逆变换对数乘封闭
    - $A^{-1}(k\vec{\alpha})=A^{-1}(kAA^{-1}(\vec{\alpha}))=kA^{-1}(\vec{\alpha})$
- 线性变换的**加法**是线性变换
  - 证明：线性变换的加法对加法封闭
    - $(A+B)(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
    - $=A(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+B(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$
    - $=A(\vec{\alpha})+A(\vec{\beta})+B(\vec{\alpha})+B(\vec{\beta})$
    - $=A(\vec{\alpha})+B(\vec{\alpha})+A(\vec{\beta})+B(\vec{\beta})$
    - $=(A+B)(\vec{\alpha})+(A+B)(\vec{\beta})$
  - 证明：线性变换的加法对数乘封闭
    - $(A+B)(k\vec{\alpha})$
    - $=A(k\vec{\alpha})+B(k\vec{\beta})$
    - $=kA(\vec{\alpha})+kB(\vec{\alpha})$
    - $=k(A+B)(\vec{\alpha})$
- 线性变换的**数乘**是线性变换
  - 证明：线性变换的数乘对加法封闭
    - $(kA)(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

        - $= k\left(A(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\right)$
        - $= k\left(A(\vec{\alpha})+A(\vec{\beta})\right)$
        - $= (kA)(\vec{\alpha})+(kA)(\vec{\beta})$
    - 证明：线性变换的数乘对数乘封闭
        - 证明略
- 定理
    - 线性空间 V 上的所有线性变换 $LT(V)$ 是线性空间
- 例子





26.3 线性变换的矩阵表示

- 引例
    - 假设线性空间 V 和线性变换 A

    - 线性空间 V 内的任意向量都可以用一组基来表示
    - 即 $\forall\vec{\alpha} \in V,\ \vec{\alpha} = a_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots a_n\overrightarrow{\epsilon_n}$
    - 将线性变换 A 作用在 $\vec{\alpha}$ 上，可以得到
    - $A(\vec{\alpha}) = a_1 A(\overrightarrow{\epsilon_1}) + \cdots + a_n A(\overrightarrow{\epsilon_n})$
    - 发现 A 在 $\vec{\alpha}$ 上的作用完全由 A 在基上的作用决定
- 性质1：线性变换由其在基上的作用决定
    - $A = B \Leftrightarrow A(\overrightarrow{\epsilon_i}) = B(\overrightarrow{\epsilon_i}), \qquad i = 1,2 \dots n$
- 性质2： $\forall\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_n}, \exists A\ \ s.t.\ A(\overrightarrow{\epsilon_1}) = \overrightarrow{\alpha_1} \dots A(\overrightarrow{\epsilon_n}) = \overrightarrow{\alpha_n}$
    - 构造 $A(\vec{\alpha}) = a_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots a_n\overrightarrow{\alpha_n}$ 即满足条件
    - 证明满足$A(\overrightarrow{\epsilon_i}) = \overrightarrow{\alpha_i}$
        - $A(\overrightarrow{\epsilon_i})$
        - $= A(0\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + 1\overrightarrow{\epsilon_i} + \cdots + 0\overrightarrow{\epsilon_n})$
        - $= 0\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + 1\overrightarrow{\alpha_i} + \cdots + 0\overrightarrow{\alpha_n}$
        - $= \overrightarrow{\alpha_i}$
    - 证明 A 对加法封闭
        - $A\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$
        - $= A\left((a_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{\epsilon_n}) + (b_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{\epsilon_n})\right)$
        - $= A\left((a_1 + b_1)\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + (a_n + b_n)\overrightarrow{\epsilon_n}\right)$
        - $= (a_1 + b_1)\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + (a_n + b_n)\overrightarrow{\alpha_n}$
        - $= A(\vec{\alpha}) + A\left(\vec{\beta}\right)$
    - 证明 A 对数乘封闭
        - $A(k\vec{\alpha})$
        - $= A(ka_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + ka_n\overrightarrow{\epsilon_n})$
        - $= ka_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + ka_n\overrightarrow{\alpha_n}$
        - $= k(a_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{\alpha_n})$
        - $= kA(\vec{\alpha})$
    - 证毕
- 定理1
    - 线性空间 V 内取定一组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$
    - 任取 n 个向量 $\overrightarrow{\alpha_1} \dots \overrightarrow{\alpha_n}$
    - 存在唯一的 A，使得 $A(\overrightarrow{\epsilon_i}) = \overrightarrow{\alpha_i} \quad (i = 1,2 \dots n)$
- 线性变换的矩阵
    - 线性空间 V 内有一组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$
    - 将线性变换 A 作用在每一个基上，得到

        - $A(\overrightarrow{\epsilon_1}) = \overrightarrow{\alpha_1} = a_{11}\overrightarrow{\epsilon_1} + a_{21}\overrightarrow{\epsilon_2} + \cdots a_{n1}\overrightarrow{\epsilon_n}$
        - $A(\overrightarrow{\epsilon_2}) = \overrightarrow{\alpha_2} = a_{12}\overrightarrow{\epsilon_1} + a_{22}\overrightarrow{\epsilon_2} + \cdots a_{n2}\overrightarrow{\epsilon_n}$
        - $\vdots$
        - $A(\overrightarrow{\epsilon_n}) = \overrightarrow{\alpha_n} = a_{1n}\overrightarrow{\epsilon_1} + a_{2n}\overrightarrow{\epsilon_2} + \cdots a_{nn}\overrightarrow{\epsilon_n}$
    - 即 $\left(A(\overrightarrow{\epsilon_1}), A(\overrightarrow{\epsilon_2}) \dots A(\overrightarrow{\epsilon_n})\right) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}$
    - 其中 $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$被称为 A 的矩阵
    - 上式又可以写作
    - $A(\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}) = (A\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, A\overrightarrow{\epsilon_n}) = (\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}$
- 定理2
    - 内容
        - 线性空间 V 内取定一组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$
        - 任意线性变换 A 都与其矩阵 $\mathcal{A}$ 一一对应
        - 并且保持加法、数乘、乘法和逆
    - 证明线性变换保持乘法
        - $AB(\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})$
        - $= A\left(B(\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\right)$
        - $= A\left((\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{B}\right)$
        - $= (A\overrightarrow{\epsilon_1} \dots A\overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{B}$
        - $= \left((\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}\right)B$
        - $= (\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})(\mathcal{A}\mathcal{B})$
- 线性变换与矩阵之间的关系
    - 线性空间 V 内有一组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$
    - 线性变换 A 对应的矩阵为 $\mathcal{A}$
    - 向量 $\vec{\alpha}$ 的坐标为 $(x_1 \dots x_n)$
    - 经过线性变换后 $A(\vec{\alpha})$ 的坐标为 $(y_1 \dots y_n)$
    - 将 $\vec{\alpha}$ 用基底表示为
        - $\vec{\alpha} = (\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
    - 故 $A(\vec{\alpha})$ 可以表示为
        - $A(\vec{\alpha}) = A\left((\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$
        - $= (A\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, A\overrightarrow{\epsilon_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

        - $= \left((\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
        - $= (\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\left(\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$
    - 又因为 $A(\vec{\alpha})$ 用基底表示为
        - $A(\vec{\alpha}) = (\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n})\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
    - 故 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- 定理3：线性变换在两组基下的矩阵相似，反之亦然
    - 线性空间 V 内有两组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$ 和 $\overrightarrow{\eta_1} \dots \overrightarrow{\eta_2}$ 满足
        - $(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{C}$ ①
        - 其中 $\mathcal{C}$ 为过渡矩阵
    - 线性变换 A 在 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$ 下对应的矩阵为 $\mathcal{A}$
        - 即 $A(\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n}) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}$ ②
    - 线性变换 A 在 $\overrightarrow{\eta_1} \dots \overrightarrow{\eta_2}$ 下对应的矩阵为 $\mathcal{B}$
        - 即 $A(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = (\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2})\mathcal{B}$ ③
    - 将 ① 代入 ③ 得
        - $A(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = (\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2})\mathcal{B} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{C}\mathcal{B}$
    - 将 ② 代入 ③ 得
        - $A(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = A(\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{C} = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}\mathcal{B}$
    - 故 $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}$
    - 即得证

第27讲 欧几里得空间

2017年7月14日 19:52

27.1 广义内积

- $\mathbb{R}^n$ 中的内积、长度和角度
  - $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1b_1+\cdots a_nb_n$
  - $\|\vec{\alpha}\|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}$
  - $\angle\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\arccos\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|}$
- 广义内积
  - V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间
  - 二元实函数 $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 被称为内积，若满足
  - 对称性
    - $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=(\vec{\beta},\vec{\alpha})$
  - 双线性
    - $\left(k\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=k\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$
    - $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)=(\vec{\alpha},\vec{\gamma})+\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)$
  - 非负性（正定性）
    - $(\vec{\alpha},\vec{\alpha})\geq 0$
    - $(\vec{\alpha},\vec{\alpha})=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$
  - 此时称 V 为欧氏空间或内积空间
  - 记作 E^n (Euclidean)
- $n\times n$ 方阵 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的内积
  - $(A,B)=tr(AB^T)$
  - 证明对称性
    - $(A,B)=tr(AB^T)=tr\left((AB^T)^T\right)=tr(BA^T)=(B,A)$
  - 证明双线性
    - $(kA,B)=tr(kAB^T)=k\cdot tr(AB^T)=k(A,B)$
    - $(A+B,C)=tr\left((A+B)C^T\right)=tr(AC^T+BC^T)$
    - $=tr(AC^T)+tr(BC^T)=(A,C)+(B,C)$
  - 证明非负性

    - $(A,A)=tr(AA^T)=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{nn}^2\geq 0$
    - $(A,A)=0\Leftrightarrow A=0$
- $[a,b]$上所有实连续函数 $C[a,b]$ 的内积
  - $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$
  - 证明略
- 由广义内积自然诱导的长度（范数）
  - $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}$
  - 正定性
    - $|\vec{\alpha}|\geq 0$
    - $|\vec{\alpha}|=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\vec{0}$
  - 绝对齐次
    - $|k\vec{\alpha}|=|k||\vec{\alpha}|$
  - 三角不等式
    - $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$
    - 证明见柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式
    - $\begin{cases}(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta})\leq(\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\beta})+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\\(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta})=(\vec{\alpha},\vec{\alpha})+2(\vec{\alpha},\vec{\beta})+(\vec{\beta},\vec{\beta})\end{cases}$
    - $\Rightarrow(\vec{\alpha},\vec{\beta})\leq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
  - 将三角不等式应用于 $\mathbb{R}^n$
    - $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=a_1b_1\ldots a_nb_n$
    - $\Rightarrow|a_1b_1\ldots a_nb_n|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$
  - 将三角不等式应用于 $c[a,b]$
    - $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$
    - $\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2dx}$
- 由广义内积自然诱导的距离
  - $d=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$
- 由广义内积自然诱导的角度
  - $\theta=arccos\frac{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|},\qquad 0<\theta<\pi$
  - 正交（垂直）

- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

- 零向量
  - 零向量垂直任何向量
  - 只有零向量和自身垂直
- 勾股定理 (Pythagorean theorem)
  - $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2$
  - $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$
  - $= (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + 2\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) + \left(\vec{\beta}, \vec{\beta}\right)$
  - $= (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{\beta}, \vec{\beta}\right)$
  - $= |\vec{\alpha}|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2$
- 广义勾股定理
  - $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \dots, \overrightarrow{\alpha_n}$ 两两正交，则
  - $|\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + \overrightarrow{\alpha_n}| = |\overrightarrow{\alpha_1}|^2 + \cdots + |\overrightarrow{\alpha_n}|$

27.2 标准正交基

- 度量矩阵
  - 欧几里得空间 E^n 中有一组基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$
  - $\vec{\alpha} = x_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{\epsilon_n}$
  - $\vec{\beta} = y_1\overrightarrow{\epsilon_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{\epsilon_n}$
  - $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left(\overrightarrow{\epsilon_i}, \overrightarrow{\epsilon_j}\right)$
  - $= (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
  - 其中 $a_{ij} = \left(\overrightarrow{\epsilon_i}, \overrightarrow{\epsilon_j}\right)$
  - $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 叫做内积的度量矩阵
- 标准正交基
  - $\left(\overrightarrow{\epsilon_i}, \overrightarrow{\epsilon_j}\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A_{n\times n} = I_n$
  - 此时 $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = (x_1, \dots, x_n)I\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- 定理：两个标准正交基之间的过渡矩阵为正交矩阵，反之亦然
  - 欧氏空间 E^n 内的两组标准正交基 $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$ 和 $\overrightarrow{\eta_1} \dots \overrightarrow{\eta_2}$
  - 且满足 $(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})C$

- 要证：$C^TC = I$
- $(\overrightarrow{\eta_1}, \dots, \overrightarrow{\eta_2}) = (\overrightarrow{\epsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\epsilon_n})\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$
- 又因为 $(\overrightarrow{\eta_i}, \overrightarrow{\eta_j}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 故 $c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{1n}c_{1n} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
- 即 C 是正交矩阵

27.3 正交变换

- 定义
  - 欧氏空间 E^n 中，保持内积不变的线性变换称为正交变换
  - $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E^n, \qquad (A\vec{\alpha}, A\vec{\beta}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
  - 几何中定义为保持距离不变的变换
- 例子：旋转
  - $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量 $\overrightarrow{\alpha_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\alpha_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$
  - 经过旋转 θ 后得到 $\overrightarrow{\beta_1} = \begin{pmatrix} {x_1}' \\ {y_1}' \end{pmatrix}, \overrightarrow{\beta_2} = \begin{pmatrix} {x_2}' \\ {y_2}' \end{pmatrix}$
  - $(\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}) = \overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2} = x_1x_2 + y_1y_2$
  - 令 $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$，则有 $A^TA = I$
  - $(\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}) = \overrightarrow{\beta_1}^T\overrightarrow{\beta_2} = (A\overrightarrow{\alpha_1})^T(A\overrightarrow{\alpha_2}) = \overrightarrow{\alpha_1}^TA^TA\overrightarrow{\alpha_2} = \overrightarrow{\alpha_1}^T\overrightarrow{\alpha_2}$
  - 故 $(\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}) = (\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2})$
- 定理
  - A 是欧氏空间 E^n 中的线性变换，以下命题等价
    1. A 是正交变换 $(A\vec{\alpha}, A\vec{\beta}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
    2. A 保持长度不变 $|A\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}|$
    3. $\overrightarrow{\epsilon_1} \dots \overrightarrow{\epsilon_n}$ 是标准正交基 $\Rightarrow A\overrightarrow{\epsilon_1} \dots A\overrightarrow{\epsilon_n}$ 也是标准正交基
    4. A 在任意标准正交基下的矩阵都是正交矩阵
  - 证明 $1 \Rightarrow 2$
    - $(A\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$
    - $\Rightarrow |A\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2$
    - $\Rightarrow |A\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}|$
  - 证明 $2 \Rightarrow 1$
    - $(A\vec{\alpha}, A\vec{\alpha}) = (\vec{\alpha}, \vec{\alpha})$

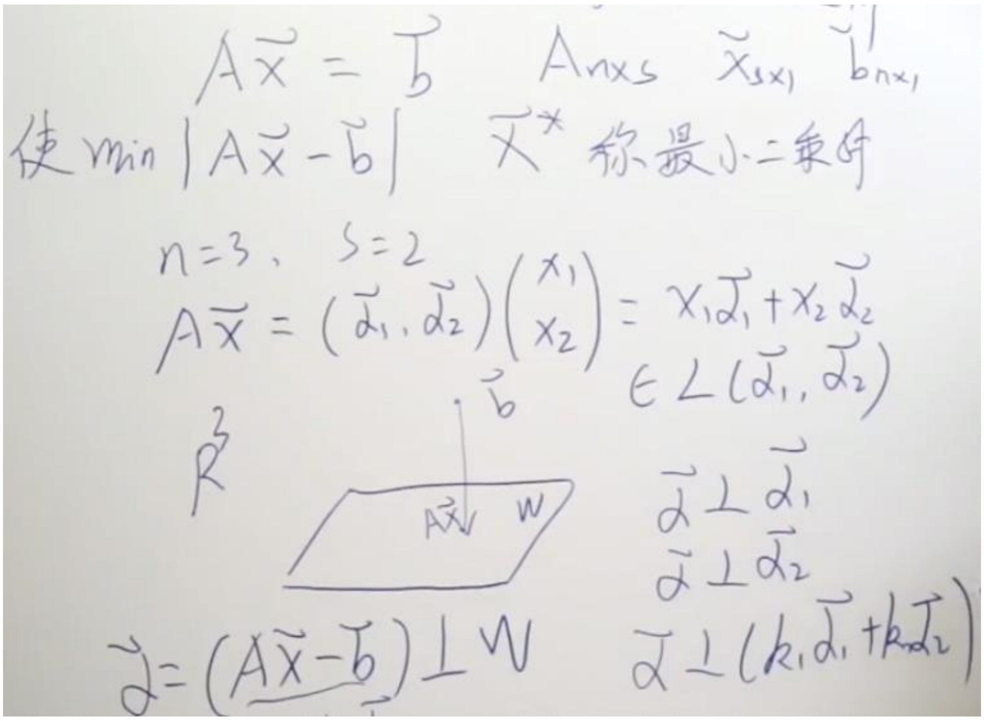
        - $\left(A\vec{\beta},A\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\beta},\vec{\beta}\right)$
        - $\left(A(\vec{\alpha}+\vec{\beta}),A(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\right)=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$
        - 对于上式 $\begin{cases}\text{左}=(A\vec{\alpha},A\vec{\alpha})+\left(A\vec{\beta},A\vec{\beta}\right)+2\left(A\vec{\alpha},A\vec{\beta}\right)\\ \text{右}=2\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+(\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{\beta},\vec{\beta}\right)\end{cases}$
        - 故 $\left(A\vec{\alpha},A\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)$
    - 证明 $1\Rightarrow 3$
        - $\left(A\overrightarrow{\epsilon_i},A\overrightarrow{\epsilon_j}\right)=\left(\overrightarrow{\epsilon_i},\overrightarrow{\epsilon_j}\right)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$
    - 证明 $3\Rightarrow 1$
        - $\begin{cases}\vec{\alpha}=x_1\overrightarrow{\epsilon_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{\epsilon_n}\\ \vec{\beta}=y_1\overrightarrow{\epsilon_1}+\cdots+y_n\overrightarrow{\epsilon_n}\end{cases}\Rightarrow\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j$
        - $\begin{cases}\mathrm{A}\vec{\alpha}=x_1A\overrightarrow{\epsilon_1}+\cdots+x_nA\overrightarrow{\epsilon_n}\\ A\vec{\beta}=y_1A\overrightarrow{\epsilon_1}+\cdots+y_nA\overrightarrow{\epsilon_n}\end{cases}$
        - $\because A\overrightarrow{\epsilon_1}\dots A\overrightarrow{\epsilon_n}$ 是标准正交基
        - $\therefore\left(A\vec{\alpha},A\vec{\beta}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j$
    - 证明 $4\Leftrightarrow 3$
        - $A(\overrightarrow{\epsilon_1}\dots\overrightarrow{\epsilon_n})=(\overrightarrow{\epsilon_1}\dots\overrightarrow{\epsilon_n})\mathcal{A}$
        - 由 27.2 的定理简单可得

第28讲 线性代数的应用举例

2017年7月14日　　22:55

28.1 不相容方程组的最小二乘解

- 不相容线性方程组
    - 一般的线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 无解
- 最小二乘解
    - 使得 $A\vec{x} - b$ 最小的 $\vec{x}^*$
    - 即求 $min|A\vec{x} - b|$
    - 其中 $A\vec{x} - b$ 称为残差向量
- $\mathbb{R}^3$ 中的例子



- 更高维下的例子
    - $A\vec{x} = (\overrightarrow{\alpha_1}, \dots, \overrightarrow{\alpha_s})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = x_1\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + x_s\overrightarrow{\alpha_s} \in L(\overrightarrow{\alpha_1}, \dots, \overrightarrow{\alpha_s})$
    - 是否当 $(A\vec{x} - b) \perp \overrightarrow{\alpha_i}$ $(i = 1,2 \dots s)$ 时，$|A\vec{x} - b|$ 最小？
    - 将取最小值时的 $A\vec{x}^* = (\overrightarrow{\alpha_1}, \dots, \overrightarrow{\alpha_s})\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_s^* \end{pmatrix}$ 记为 $\vec{\alpha}$，显然有 $\vec{\alpha} \in W$
    - 即 $\left(\vec{\alpha} - \vec{b}\right) \perp \overrightarrow{\alpha_i}$ $(i = 1,2 \dots s)$
    - 要证：$\left|\vec{\alpha} - \vec{b}\right| \leq \left|\vec{\beta} - \vec{b}\right|$，其中 $\vec{\beta}$ 为 W 内的其他向量

- $|\vec{\beta}-\vec{b}|^2 = |\vec{\beta}-\vec{\alpha}+\vec{\alpha}-\vec{b}|^2$
- $= (\vec{\beta}-\vec{\alpha})^2 + (\vec{\alpha}-\vec{b})^2 + 2(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{b})$
- 当 $(\vec{\alpha}-\vec{b}) \perp \overrightarrow{\alpha_i}\ (i=1,2\dots s)$ 时，$(\vec{\beta}-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{b}) = 0$ 最小
- 即 $|\vec{\beta}-\vec{b}|^2 = (\vec{\beta}-\vec{\alpha})^2 + (\vec{\alpha}-\vec{b})^2$ 取得最小值

- 解法
  - 令 $\vec{\alpha} = A\vec{x}^* = (\overrightarrow{\alpha_1},\dots,\overrightarrow{\alpha_s})\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_s^* \end{pmatrix} = x_1^*\overrightarrow{\alpha_1} + \cdots + x_s^*\overrightarrow{\alpha_s}$
  - $min|A\vec{x}-b|$
  - $\Rightarrow (\vec{\alpha}-\vec{b}) \perp \overrightarrow{\alpha_i}\ (i=1,2\dots s)$
  - $\Rightarrow \begin{cases} (A\vec{x}^*-\vec{b})\cdot\overrightarrow{\alpha_1} = 0 \\ (A\vec{x}^*-\vec{b})\cdot\overrightarrow{\alpha_2} = 0 \\ \vdots \\ (A\vec{x}^*-\vec{b})\cdot\overrightarrow{\alpha_s} = 0 \end{cases}$
  - $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\alpha_1}^T(A\vec{x}^*-\vec{b}) = 0 \\ \overrightarrow{\alpha_2}^T(A\vec{x}^*-\vec{b}) = 0 \\ \vdots \\ \overrightarrow{\alpha_s}^T(A\vec{x}^*-\vec{b}) = 0 \end{cases}$
  - $\Rightarrow A^T(A\vec{x}^*-\vec{b}) = 0$
  - $\Rightarrow A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$
  - 注：上式被称为原方程的正规方程
- 例：求不相容线性方程组 $\begin{cases} x_1+4x_2=-2 \\ x_1+2x_2=6 \\ 2x_1+3x_2=1 \end{cases}$ 的最小二乘解
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - 由正规方程 $A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$
  - 解得 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

28.2 多项式插值

- 引例
  - 已知点 $(x_0,y_0)\dots(x_n,y_n)$
  - 求插值多项式 $y=f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$
  - 将所有点代入得
  - $\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n = y_n \end{cases}$

- $A=\begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{pmatrix}$ 为范德蒙矩阵非奇异
- 故一定有解

- 例子：求过 $(1,2),(2,3),(3,6)$ 的插值多项式
  - $y=a_0+a_1x+a_2x^2$
  - $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 \\ a_2 \\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 \\ 3 \\ 6\end{pmatrix}$
  - $\Rightarrow\begin{cases}a_0=3 \\ a_1=-2 \\ a_2=1\end{cases}$
  - $\Rightarrow y=3-2x+x^2$

28.3 数值积分

- 思路
  - 要算 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ 的数值积分
  - 若找到多项式 $p(x)\sim f(x)$，则 $I(f)\sim I(p)$
- 法一
  - 取点
    - $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1))\dots(x_n,f(x_n))$
  - 插值
    - $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$
    - $\begin{pmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n)\end{pmatrix}$
  - 积分
    - $\int_a^b p(x)dx$
    - $=a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+\cdots+a_n\int_a^b x^ndx$
    - $=\left(\int_a^b dx,\int_a^b xdx\dots\int_a^b x^ndx\right)\begin{pmatrix}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$

- $$= \left(\int_a^b dx, \int_a^b x dx \dots \int_a^b x^n dx\right) \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

- 法二
  - 在 f 上取点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \dots (x_n, f(x_n))$
  - 插值函数 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$
  - 若能找到 $(A_0, \dots, A_n)$ 使得
  - $$(A_0, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \left(\int_a^b dx, \int_a^b x dx \dots \int_a^b x^n dx\right)$$
  - 则 $\int_a^b p(x) dx = \left(\int_a^b dx, \int_a^b x dx \dots \int_a^b x^n dx\right) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
  - $$= (A_0, \dots, A_n) \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (A_0, \dots, A_n) \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$
- 例子：取三个点
  - 得到 $f(a), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f(b)$
  - $$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \frac{a+b}{2} & b \\ a^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \int_a^b dx \\ \int_a^b x dx \\ \int_a^b x^2 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix}$$
  - $V_3 \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \vec{b}$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ a & \frac{a+b}{2} & b & \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2 & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 & \frac{b^3-a^3}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & (b-a)/6 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A_0 = A_2 = \dfrac{b-a}{6}, \qquad A_1 = \dfrac{2}{3}(b-a)$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$
- 上式被称为 Simpson 公式

- 注：取两个点可得梯形公式
  - $\dfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$